Чувствительность осциллографа

И. И. Кравченко

9 июля 2026 г.

Решаем две связанные задачи по физике о чувствительности осциллографа из сборника Савченко [1]. Опубликовано впервые на «Savchenko Solutions».

1 «Граничная» частота

7.3.6. Длина пластин осциллографа l, ускоряющее напряжение V. При какой частоте электрического сигнала чувствительность осциллографа уменьшится?

Эта задача является обобщением задачи 7.3.4 (Савченко) на случай переменного напряжения на отклоняющих (управляющих пластинах).

Начнем с вычисления скорости поперечной v_y, приобретаемой электроном за все время движения τ между отклоняющими пластинами.

Из второго закона Ньютона на поперечное направление:

$$v_y = \int_0^\tau \frac{F(t)}{m} dt, \tag{1}$$

где $F_0(t)$ — сила поля пластин, зависящая от времени t, m — масса электрона.

Напряжение на пластинах считаем гармоническим. Оно задается в общем для произвольного электрона с началом отсчета времени $t = 0$ в момент его попадания в область между пластинами так:

$$U(t) = U_0 \sin\left(\omega t + \varphi\right), \tag{2}$$

где U_0 — амплитуда напряжения на пластинах, ω — циклическая частота напряжения, φ — начальная фаза напряжения для произвольно выбранного электрона, попадающего в область между пластинами.

С учетом $F = Ee$ (где E — напряженность поля между пластинами, e — заряд электрона) и $E = U/d$ (где d — расстояние между пластинами) можем получить после подстановки (2) в (1) и замены переменной интегрирования следующее

$$v_y = \frac{eU_0}{md\omega} \int_0^\tau \sin(\omega t + \varphi)\, d(\omega t + \varphi).$$

После интегрирования:

$$v_y = \frac{eU_0}{md\omega} \Big[\cos\varphi - \cos\left(\omega\tau + \varphi\right) \Big]. \tag{3}$$

По формуле суммы тригонометрических функций

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$$

перепишем (3) в терминах синуса

$$v_y = \frac{2eU_0}{md\omega}\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}+\varphi\right)\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

(позже объясним этот переход).

Далее, не усложняя задачу, рассмотрим ситуацию $L \gg l$ (где L — расстояние от экрана до точки вылета электрона после поперечного поля).

По результатам решения задачи 7.3.4 в условиях нашей модели чувствительность S равна

$$S = \frac{y}{U_{\text{отк}}}, \tag{4}$$

где $y \approx v_y\frac{L}{v}$ (тут v — продольная скорость электрона) есть смещение электрона, $U_{\text{отк}}$ — напряжение, вызывающее это смещение.

Отклоняющим напряжением $U_{\text{отк}}$ посчитаем значение напряжения $U(\tau/2)$ между пластинами в момент, когда электрон прошел половину продольного расстояния между пластинами:

$$U_{\text{отк}} = U_0\sin\left(\omega\frac{\tau}{2}+\varphi\right).$$

Подставляем найденное значение для v_y в (4) и с учетом сказанного про $U_{\text{отк}}$ и $eV = mv^2/2$ можем получить в такой форме

$$\boxed{S = \frac{Ll}{2Vd}\frac{\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}}.} \tag{5}$$

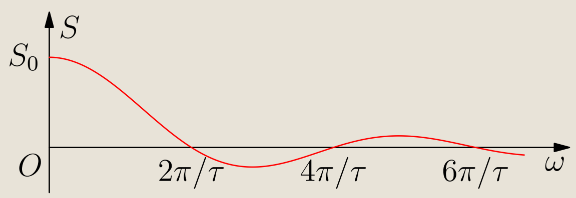
Время пролета $\tau = l/v = l/\sqrt{2eV/m}$ фиксировано! В пределе постоянного напряжения $\omega \to 0$ приходим к результату задачи 7.3.4

$$S_0 = \frac{Ll}{2Vd}$$

(в формуле (5) обнаруживается первый замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$).

Чувствительность вообще зависит от частоты ω, как видим. Максимальное значение ее S_0. Меняется качественно $S(\omega)$ так же, как и функция $\frac{\sin x}{x}$.

Вот график функции $S(\omega)$:



Если мы увеличиваем частоту от нуля, то пока

$$\frac{\omega\tau}{2} \ll 1$$

мы имеем $S \approx S_0$, а заметные отклонение чувствительности от максимума (или ее уменьшение от электростатического максимума S_0) будут уже при

$$\frac{\omega\tau}{2} \sim 1,$$

что дает оценку

$$\boxed{\nu \sim \frac{1}{\tau} = \frac{\sqrt{2eV/m}}{l}.}$$

В издании Савченко 1981 г. формулировка более общая и ответ как оценка.

Связанная задача Капицы: «Определить предел точности измерения интервала времени катодным осциллографом».

2 Амплитуда ВЧ-сигнала

7.3.7. При подаче на пластины осциллографа высокочастотного сигнала с частотой $\nu \gg 1/\tau$ (τ — время пролета электрона через пластины) на экране осциллографа получена полоса ширины δ. Чувствительность осциллографа в обычном режиме работы S. Определите амплитуду сигнала.

В решении задачи 7.3.6 (Савченко), которое приведено в разделе 1, получена формула поперечной скорости электрона сразу после выхода из пространства между отклоняющими пластинами (в терминах синусов):

$$v_y = \frac{2eU_0}{md\omega} \sin\left(\frac{\omega\tau}{2} + \varphi\right) \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right), \tag{1}$$

где e — заряд электрона, U_0 — амплитуда напряжения на отклоняющих пластинах (амплитуда сигнала), m — масса электрона, d — расстояние между отклоняющими пластинами, ω — частота сигнала.

Как и в той задаче, не усложним и рассмотрим ситуацию $L \gg l$ (где L — расстояние от экрана до точки вылета электрона после поперечного поля, l — продольное расстояние между отклоняющими пластинами).

Смещение электрона поперечное считаем происходит только на пути L после отклоняющих пластин:

$$y = v_y \frac{L}{v}, \tag{2}$$

где v — продольная скорость электрона.

Величины L, v фиксированы считаем. Полоса ширины δ выделяет область всевозможных отклонений

$$y = \frac{L}{v} \frac{2eU_0}{md\omega} \sin\left(\frac{\omega\tau}{2} + \varphi\right) \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

(подставили (1) в (2)).

Тогда отклонения y должны лежать в интервале

$$[-\delta/2; \delta/2].$$

2.1 Идеальный случай

Для какого-то электрона может оказаться такая начальная фаза $\varphi = \pi/2 - \omega\tau/2$, что первый синус станет равным 1. Поэтому в любом случае максимум смещения

$$\boxed{y_\mathrm{m} = \frac{L}{v}\frac{2eU_0}{md\omega}\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right).} \tag{3}$$

Откуда можно выразить после многих преобразований с учетом $y_\mathrm{m} = \delta/2$, $eV = mv^2/2$ и для чувствительности $S = Ll/(2Vd)$:

$$\boxed{U_0 = \frac{\pi\delta\nu\tau}{2S\sin\left(\pi\nu\tau\right)}.} \tag{4}$$

Такой ответ в идеальном случае. Далее станет понятно, почему так.

2.2 Реальный случай

Дело в том, что в реальности частота сигнала может случайно меняться по меньшей мере на величину $\Delta \ll \nu$.

Выражение (3) становится

$$y_\mathrm{m} = \frac{L}{v}\frac{2eU_0}{md\omega}\sin\left(\pi\nu\tau \pm \pi\Delta\tau\right).$$

По условию можно сказать, что $\pi\nu\tau \gg 1$, тогда для малой Δ справедливо $\pi\Delta\tau \sim 1$, что по порядку дает также $\pi\Delta\tau \sim 2\pi$. Это означает что добавка $\pi\Delta\tau$ может оказаться любой из области определения синуса и этот самый синус может стать равным 1, что отвечает интересующему наибольшему максимуму смещения y_m:

$$\boxed{y^*_\mathrm{m} = \frac{L}{v}\frac{2eU_0}{md\omega},}$$

отвечающему $y^*_\mathrm{m} = \delta/2$. Подходящая Δ должна сохраниться на всем времени пролета электрона между отклоняющими пластинами.

Из предыдущего так же, как и в прошлый раз можно выразить

$$\boxed{U_0 = \frac{\pi\delta\nu\tau}{2S}.}$$

Литература

[1] И. И. Воробьев, П. И. Зубков, Г. А. Кутузова, О. Я. Савченко, А. М. Трубачев и В. Г. Харитонов. *Задачи по физике.* Новосибирск: Новосибирский государственный университет, 2008.

[2] А. А. Жигарев. *Электронная оптика и электронно-лучевые приборы.* Высшая школа, 1972.

[3] И. Яковлев. *Тригонометрические формулы.* www.mathus.ru.

[4] И. В. Яковлев. *Физика.* МЦНМО, 2021.

[5] П. Л. Капица. *Физические задачи.* Знание, 1966.

[6] Ю. М. Волченко. *Научная графика на языке Asymptote.* 2018.

[7] Charles Staats III. *Пособие по Asymptote.* 2022.