Спиральный конденсатор

И. И. Кравченко

4 июля 2026 г.

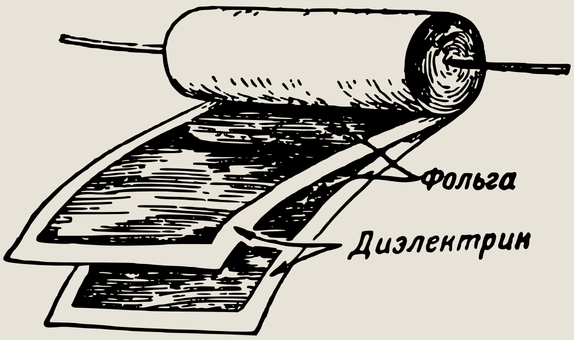
Решаем задачу про сложный конденсатор из сборника Савченко [1]. Опубликовано впервые на «Savchenko Solutions».

Два раздела — два способа решения. Если первый раздел «Метод интегрирования» будет непонятен, то переходите ко второму «Метод суммирования» — там элементарное решение. Замечания к решениям предложил преподаватель физики Е. Дубровин.

6.4.8*. Плоский конденсатор изготовлен из двух лент ширины a и длины l. Расстояние между лентами d. Определите емкость конденсатора, если его свернуть в многовитковый рулон радиуса $R \gg d$.

1 Метод интегрирования

Радиус R рулона обычно считается внешним, а рулон является сплошным [2].



Сделаем рассуждения по возможности точными: рулонный конденсатор (рулон) рассмотрим как множество цилиндрических конденсаторов (см. задачу 6.4.7 из Савченко) с плавно меняющимся радиусом, учтем емкость зазора между основными слоями [3]. Зазор считаем постоянным, его величину обозначим b (далее мы выразим ее через данные в задаче).

Емкость рулона C складывается из емкости C_1 основных слоев и емкости C_2 зазоров (в эквивалентной схеме они соединены параллельно [3]).

- Емкость C_1 складывается из емкостей элементов цилиндрических конденсаторов (они соединены параллельно) с расстоянием d между обкладками.

- Емкость C_2 аналогично складывается из емкостей элементов цилиндрических конденсаторов, но с расстоянием b между обкладками.

Начнем с вычисления емкости C_1.

Представим произвольный цилиндрический конденсатор с толщиной d на расстоянии r от оси рулона. Умножение емкости этого конденсатора на малое приращение dn количества таких конденсаторов даст элементарную емкость [4]

$$dC_1 = \frac{2\pi\varepsilon_0 a}{\ln\left(1+\dfrac{d}{r}\right)}dn. \tag{1}$$

Величина dn удобно выражается через приращение dr расстояния от оси рулона:

$$dn = \frac{dr}{d+b}.$$

Для удобства дальнейшего интегрирования обозначим

$$x = \frac{r}{d}.$$

После этих замен интегрирование (1) дает:

$$C_1 = \frac{2\pi\varepsilon_0 ad}{d+b}\int\limits_1^{R/d}\frac{dx}{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}.$$

(Нижний предел интегрирования равен 1, то есть условимся, что ось рулона имеет толщину d. Это нужно для обеспечения сходимости ряда, в который будем разлагать далее логарифм при вычислении интеграла.)

Таким образом, нужно найти интеграл

$$\boxed{I = \int\limits_1^{R/d}\frac{dx}{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}.} \tag{2}$$

(Определенный интеграл будет удобней, что станет ясно из самого способа вычисления интеграла. Если далее будет сложно, то смотрите альтернативный способ нахождения интеграла в Приложении.)

Введем временную переменную $u = 1/x$ и начнем приводить подынтегральную функцию

$$f(x) = \frac{1}{\ln(1+u)}$$

к удобному для интегрирования виду через разложение в ряд логарифма [4, 5, 6]:

$$f(x) = \frac{1}{u - \dfrac{u^2}{2} + \dfrac{u^3}{3} - \ldots}.$$

(На всем интервале интегрирования ряд сходится, $0 < u \leqslant 1$.)

Нужно избавиться от ряда в знаменателе. Будем использовать формулу геометрической прогрессии

$$\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots \tag{3}$$

Выделим в нашей функции выражение вида $\dfrac{1}{1-q}$:

$$f(x) = \frac{1}{u}\frac{1}{\left(1-\left(\frac{u}{2}-\frac{u^2}{3}+\frac{u^3}{4}-\ldots\right)\right)}$$

и используем разложение (3):

$$f(x) = \frac{1}{u}\left(1+\frac{u}{2}-\frac{u^2}{3}+\frac{u^3}{4}-\ldots\right)$$

и далее

$$f(x) = \frac{1}{u}+\frac{1}{2}-\frac{u}{3}+\frac{u^2}{4}-\ldots$$

Так как $x = 1/u$, то

$$f(x) = x+\frac{1}{2}-\frac{1}{3x}+\frac{1}{4x^2}-\ldots$$

Вот эту функцию уже можем интегрировать по x, используя формулу (2). Сначала ее первообразная:

$$F(x) = \frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\ln x-\frac{1}{4x}+\ldots$$

По формуле Ньютона—Лейбница с обозначением $X = R/d$

$$I = F(X) - F(1),$$

где

$$F(X) = \frac{X^2}{2}+\frac{X}{2}-\frac{1}{3}\ln X-\frac{1}{4X}+\ldots$$

и

$$F(1) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\ln(1)-\frac{1}{4}+\ldots$$

Вынесем в предыдущих двух формулах множитель $\dfrac{X^2}{2}$:

$$F(X) = \frac{X^2}{2}\left(1+\frac{1}{X}-\frac{1}{3}\frac{2}{X^2}\ln X-\frac{2}{4X^3}+\ldots\right)$$

и

$$F(1) = \frac{X^2}{2}\left(\frac{1}{X^2}+\frac{1}{X^2}-\frac{1}{3}\frac{2}{X^2}\ln(1)-\frac{2}{4X^2}+\ldots\right)$$

Вычитая предыдущие две формулы и с условием $X = R/d \gg 1$ пренебрегая слагаемыми много меньшими единицы получаем

$$I \approx \frac{X^2}{2} = \frac{R^2}{2d^2}.$$

Отсюда пока получаем

$$C_1 \approx \frac{\pi\varepsilon_0 a}{d+b}\frac{R^2}{d}.$$

Рассуждения для нахождения C_2 аналогичны. Из симметрии предыдущей формулы относительно d и b можем сразу написать

$$C_2 \approx \frac{\pi\varepsilon_0 a}{b+d}\frac{R^2}{b}.$$

Итак, емкость рулона

$$C = C_1 + C_2,$$

значит:

$$C \approx \frac{\pi\varepsilon_0 a R^2}{b+d}\left(\frac{1}{d}+\frac{1}{b}\right). \tag{4}$$

Из геометрии рулона

$$b = \frac{\pi R^2 - ld}{l}$$

и

$$\pi R^2 = l(d+b).$$

Предыдущие две формулы подставляем в (4), упрощаем и получаем такой ответ

$$\boxed{C \approx \frac{\varepsilon_0 a l}{d}\left(1+\frac{ld}{\pi R^2 - ld}\right).}$$

Проанализировать этот ответ и рассмотреть его следствия может сам читатель.

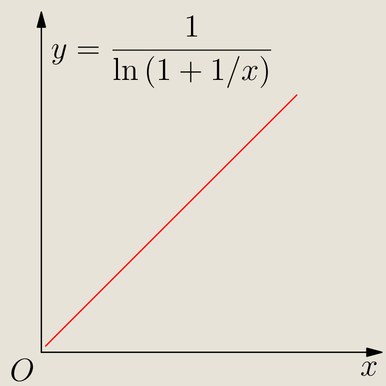
Комментарии: при $b = d$ получается, что емкость рулона равна удвоенному значению емкости размотанного конденсатора; такой же результат приводится в книге [7] при рассмотрении спирального конденсатора.

Примечание: похожая задача, но с заданным внутренним радиусом решена в [8], куда может обратиться читатель и оценить корректность рассуждений авторов.

У Савченко ответ другой: $C = \dfrac{\varepsilon_0 a l}{d}\left(1+\dfrac{ld}{2\pi R^2}\right)$.

1.1 Приложение

На большом диапазоне $x \gg 1$ график подынтегральной функции в (2)



не отличается от линейной $f(x) = x$ [5].

Так что значение интеграла (2)

$$I \approx \int\limits_1^{R/d} x\,dx \approx \frac{R^2}{2d^2}.$$

2 Метод суммирования

Радиус R рулона считаем внешним, рулон сплошной. Емкость рулона складывается из емкости C_1 цилиндрических конденсаторов толщины d и емкости C_2 цилиндрических конденсаторов толщины b, где b есть отступ между слоями толщиной d, так как пластины не должные соприкасаться (в эквивалентной схеме все цилиндрические конденсаторы соединены параллельно [3])

Начинаем с емкости C_1.

Выберем произвольный i-ый по счету от оси цилиндрический конденсатор толщиной d на расстоянии r от оси рулона и запишем для него (см. решение задачи 6.4.7 из Савченко):

$$C_{1i} = \frac{2\pi\varepsilon_0 a}{\ln\left(1+\dfrac{d}{r}\right)}$$

или с учетом $r = i(d+b)$

$$C_{1i} = \frac{2\pi\varepsilon_0 a}{\ln\left(1+\dfrac{d}{i(d+b)}\right)}.$$

Следовательно, сумма всех дает первую часть емкости рулона

$$C_1 = 2\pi\varepsilon_0 a \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\ln\left(1+\dfrac{d}{i(d+b)}\right)},$$

где $n = R/(d+b)$ есть количество цилиндрических конденсаторов толщины d в рулоне.

На большом диапазоне $i \gg 1$ значения элементов суммы лежит на линейной функции $f(i) = \dfrac{d+b}{d} i$ (покажите самостоятельно через графики [9], посмотрите Приложение в основном решении).

Поэтому

$$C_1 \approx 2\pi\varepsilon_0 a \frac{d+b}{d} \sum_{i=1}^{n} i \approx \frac{\pi\varepsilon_0 a}{d+b} \frac{R^2}{d}$$

при $n \gg 1$.

Аналогично рассчитывается C_2 — суммарная емкость цилиндрических конденсаторов толщины b. Для нее получим

$$C_2 \approx \frac{\pi\varepsilon_0 a}{d+b} \frac{R^2}{b}.$$

Все цилиндрические конденсаторы соединены параллельно, поэтому итоговая емкость рулона

$$C = C_1 + C_2,$$

значит:

$$C \approx \frac{\pi\varepsilon_0 a R^2}{b+d} \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{b}\right).$$

Из геометрии рулона

$$b = \frac{\pi R^2 - ld}{l}$$

и

$$\pi R^2 = l(d + b).$$

Предыдущие три формулы объединяем, упрощаем и получаем такой ответ

$$\boxed{C \approx \frac{\varepsilon_0 a l}{d}\left(1 + \frac{ld}{\pi R^2 - ld}\right).}$$

Литература

[1] И. И. Воробьев, П. И. Зубков, Г. А. Кутузова, О. Я. Савченко, А. М. Трубачев и В. Г. Харитонов. *Задачи по физике*. Новосибирск: Новосибирский государственный университет, 2008.

[2] В. Г. Борисов и Ю. М. Отряшенков. *Юный радиолюбитель*. Энергия, 1966.

[3] С. М. Козел. «Парадоксы плоского конденсатора». В: *Квант* 8 (1985).

[4] Я. Б. Зельдович и И. М. Яглом. *Высшая математика для начинающих физиков и техников*. Наука, 1982.

[5] А. Б. Мигдал. *Качественные методы в квантовой теории*. Наука, 1975.

[6] Я. Б. Зельдович и А. Д. Мышкис. *Элементы прикладной математики*. Наука, 1972.

[7] В. Т. Ренне. *Электрические конденсаторы*. Энергия, 1969.

[8] А. Н. Паршаков. *Принципы и практика решения задач по общей физике. Ч. 2: Электромагнетизм*. ПГТУ, 2010.

[9] Б. А. Мукушев. «Метод графических оценок». В: *Квант* 12 (1989).