

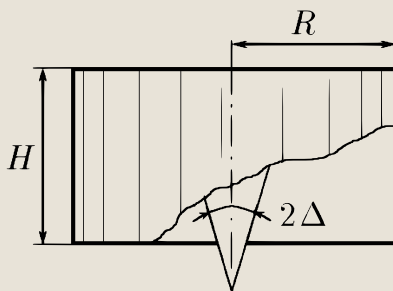
Заполнение атомами

И. И. Кравченко

28 сентября 2026 г.

Решаем задачу по физике о равномерном заполнении атомами пространства из сборника Савченко [1]. Написано для «[Savchenko Solutions](#)».

5.8.7. Атомы, имеющие одинаковую по модулю скорость v , одновременно влетают в цилиндр через небольшое отверстие, расположенное в центре дна цилиндра. Направления скоростей атомов распределены равномерно внутри конуса с небольшим углом Δ при вершине. Конус скоростей соосен с цилиндром. Радиус цилиндра R , его высота H . Оцените время равномерного заполнения атомами пространства внутри цилиндра в случае упругого отражения атомов от его стенки и в случае, когда через время $\tau \ll R/v, H/v$ после попадания на стенку атом уходит внутрь цилиндра под любым углом к его стенке со скоростью v .



1 Случай 1

Замечание. Рисунки далее качественные — вместо сильных неравенств ($\gg$) и дуг малых углов на них количественно соблюдаются просто неравенства и дуги не малых углов для наглядности. Путь решения просматривается и при таком виде рисунков.

Рассматриваем случай, когда после влета атомов в цилиндр они постоянно упруго отражаются от стенок. Атомы из цилиндра не уходят. Угол $\Delta \ll 1$.

Из цилиндрической симметрии можно рассмотреть атомы только в таком сечении цилиндра, в котором лежит ось цилиндра (эти атомы составляют так называемую двойную дугу атомов с углом 2Δ). Далее, из симметрии разлета относительно оси цилиндра можно рассмотреть только *дугу атомов* с углом Δ . В части решения для случая 1 будем рассматривать именно такую дугу атомов.

В основе решения метод графических оценок [2]. Отражения разных атомов от стенок разное, поэтому используем метод «выпрямит кривое» — каждый раз при столкновении любого атома после начала движения атома по симметрии

отражения продолжаем траекторию по прямой через стену в отраженный квадрат относительно стены столкновения. Все это происходит как на бесконечной сети с ячейкой $H \times R$ и измерения проводить удобно. Это используется в теории математических бильярдov [3].

Для дуги атомов это означает то, что в указанной сети ячеек дуга движется с сохранением своего угла Δ . Конец дуги, лежащий на оси цилиндра, движется со скоростью v .

Пусть дуга на сети ячеек занимает прямоугольную прозрачную область и ячейками эта дуга разделена на *фрагменты* (сколько ячеек содержат часть дуги, столько и фрагментов). Равномерное заполнение цилиндра будет тогда, когда дуга атомов после сворачивания области по границам ячеек до одной так называемой *результатирующей ячейки* (как сворачивают лист) превратится в набор фрагментов, равномерно заполняющих эту результирующую ячейку. Все это удовлетворяет принципам изображения движения в сети ячеек (при сворачивании двух ближайших ячеек содержимое одной из ячеек переходит в другую симметрично относительно линии сворачивания). (Сворачивания осуществлены на рисунках программно в среде рисования Asymptote.)

Теперь рассматриваем варианты соотношения размеров цилиндра H, R .

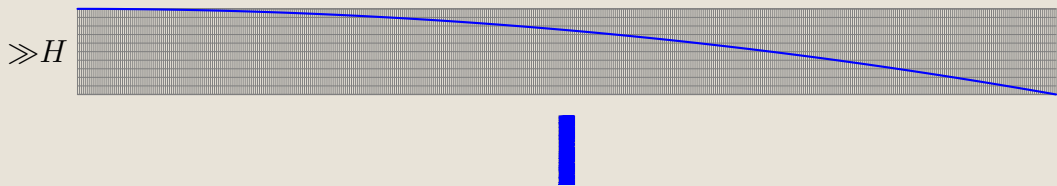
1.1 Соотношение $H \gg R$

Пусть высота цилиндра много больше его радиуса. Тогда ячейки сети рисования имеют соотношение высоты и ширины

$$H \gg R.$$

Графические оценки дают равномерное заполнение результирующей ячейки через время, когда высота дуги (вдоль оси цилиндра) окажется много больше H .

На следующем рисунке показана подходящая дуга атомов на области ячеек с соответствующим соотношением высоты и ширины (по вертикали и горизонтали соответственно). Результирующая ячейка, заполненная фрагментами показана справа от области; увеличенная результирующая ячейка показана под областью. (На следующих рисунках аналогично.)



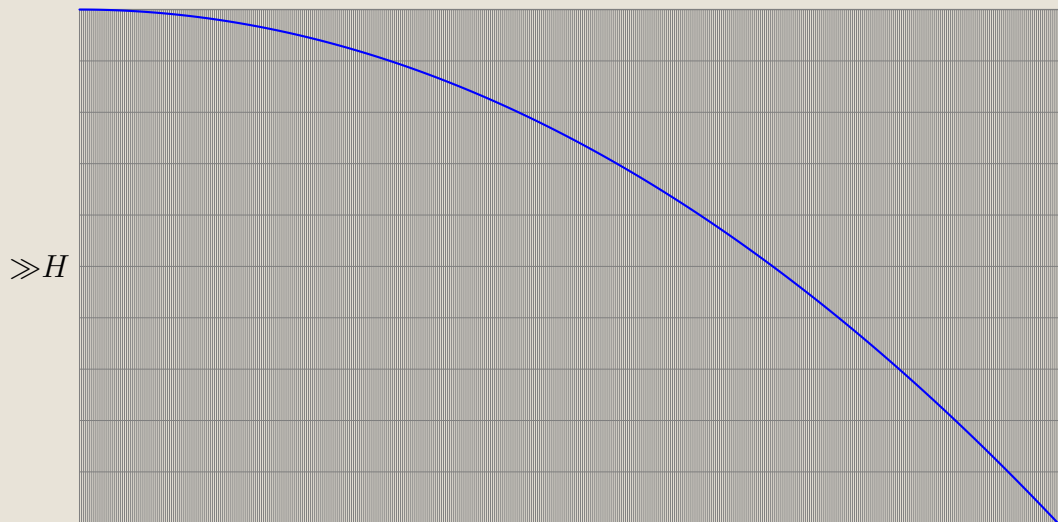
Заполнение для варианта $H \gg R$

На показанном рисунке ячейки так узки по горизонтали, что их сложно разглядеть — это обусловлено тем, что единица является величиной второго порядка малости по сравнению с их числом по горизонтали. Заметим, графические оценки показали, что если дуга имеет высоту $\sim H$, то заполнение визуально не достаточно однородно.

Из геометрии малых углов с оценками

$$\tau \gg \frac{H}{v\Delta^2}.$$

Для просматривания заполнения покажем предыдущий рисунок в растяжке в несколько раз по вертикали. Что получилось после растягивания — ниже.



Заполнение для варианта $H \gg R$ (растянуто по вертикали)

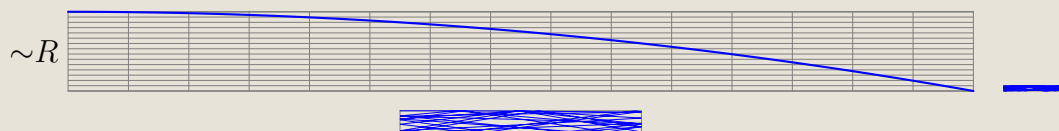
1.2 Соотношение $H \ll R$

Пусть высота цилиндра много меньше его радиуса. Тогда ячейки сети рисования имеют соотношение высоты и ширины

$$H \ll R.$$

Графические оценки дают равномерное заполнение результирующей ячейки через время, когда высота дуги (вдоль оси цилиндра) окажется порядка R .

На следующем рисунке показана подходящая дуга атомов на области ячеек.



Заполнение для варианта $H \ll R$

Из геометрии малых углов с оценками

$$\tau \sim \frac{R}{v\Delta^2}.$$

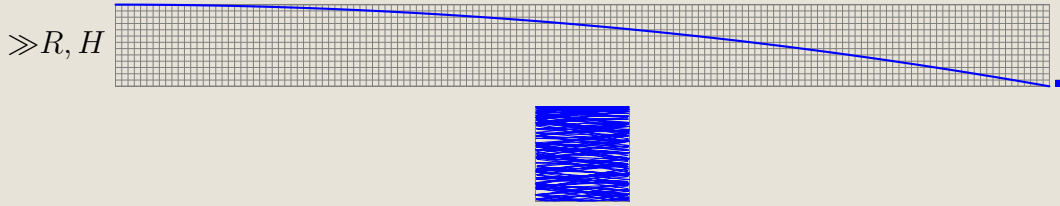
1.3 Соотношение $H \sim R$

Пусть высота цилиндра порядка его радиуса. Тогда ячейки сети рисования имеют соотношение высоты и ширины

$$H \sim R.$$

Графические оценки дают равномерное заполнение результирующей ячейки через время, когда высота дуги (вдоль оси цилиндра) окажется много больше H, R .

На следующем рисунке показана подходящая дуга атомов на области ячеек.



Заполнение для варианта $H \sim R$

Из геометрии малых углов с оценками

$$\tau \gg \frac{H}{v\Delta^2}, \frac{R}{v\Delta^2}.$$

2 Случай 2

В этой части делаем расчеты для такого случая. Сначала все атомы при первом касании со стеной «прицепляются» в местах касаний, а далее после того как они все прицепились, они одновременно стартуют со всевозможными равновероятными углами, каждый со своего места (равномерный разлет по пространству). Время ищем от начала этого равномерного разлета.

Метод такой же, как и в прошлой части, но следим действительно за дугой из всех атомов. Соотношения размеров ячеек соответствует вариантам из первой части.

2.1 Соотношение $H \gg R$

Атомы начинают равномерный разлет практически с области порядка R (они прицепились примерно на верхней крышке цилиндра — малый угол Δ и узкий цилиндр).

На расстояниях удаления атомов от места прицепа много больше R на сети ячеек дуга атомов — полуокружность.

Графические оценки дают равномерное заполнение результирующей ячейки через время, когда высота полуокружности (вдоль оси цилиндра) окажется много больше H .

На следующем рисунке показана подходящая полуокружность атомов на области ячеек. Полуокружность расходится от ее центра со скоростью v (на следующих рисунках это тоже так).



Заполнение для варианта $H \gg R$

Заметим, графические оценки показали, что если полуокружность имеет высоту $\sim H$, то заполнение визуально не достаточно однородно.

Из геометрии

$$\tau' \gg \frac{H}{v}.$$

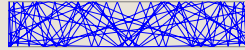
2.2 Соотношение $H \ll R$

Атомы начинают равномерный разлет практически с очень малой области по сравнению с размерами R, H (в масштабах цилиндра они прицепились примерно в точке).

Так что сразу можно считать, что на сети ячеек дуга атомов — полуокружность.

Графические оценки дают равномерное заполнение результирующей ячейки через время, когда высота полуокружности (вдоль оси цилиндра) окажется много больше R .

На следующем рисунке показана подходящая полуокружность атомов на области ячеек.



Заполнение для варианта $H \ll R$

Из геометрии

$$\tau' \gg \frac{R}{v}.$$

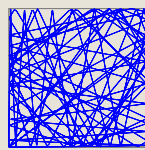
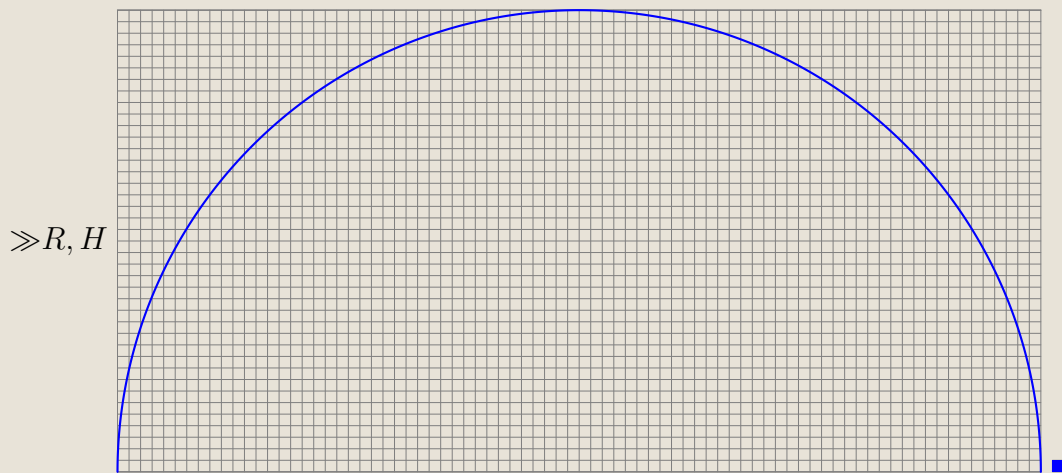
2.3 Соотношение $H \sim R$

Атомы начинают равномерный разлет практически с очень малой области по сравнению с размерами R, H (в масштабах цилиндра они прицепились примерно в точке).

Так что сразу можно считать, что на сети ячеек дуга атомов — полуокружность.

Графические оценки дают равномерное заполнение результирующей ячейки через время, когда высота полуокружности (вдоль оси цилиндра) окажется много больше H, R .

На следующем рисунке показана подходящая полуокружность атомов на области ячеек.



Заполнение для варианта $H \sim R$

Из геометрии

$$\tau' \gg \frac{H}{v}, \frac{R}{v}.$$

Литература

- [1] И. И. Воробьев, П. И. Зубков, Г. А. Кутузова, О. Я. Савченко, А. М. Трубачев и В. Г. Харитонов. *Задачи по физике*. Новосибирск: Новосибирский государственный университет, 2008.
- [2] Б. А. Мукушев. «Метод графических оценок». В: *Квант* 12 (1989).
- [3] Г. А. Гальперин и А. Н. Земляков. *Математические бильярды (бильярдные задачи и смежные вопросы математики и механики)*. Библиотечка «Квант», 1990.
- [4] Ю. М. Волченко. *Научная графика на языке Asymptote*. 2018.
- [5] Charles Staats III. *Пособие по Asymptote*. 2022.
- [6] Andy Hammerlindl, John Bowman и Tom Prince. *Asymptote Vector Graphics Application*. 2026. URL: <https://asymptote.ualberta.ca/>.