

Атом в кубе. 2

И. И. Кравченко

26 сентября 2026 г.

Решаем задачу по физике о периодичности движения и числах из сборника Савченко [1]. Написано для «Savchenko Solutions».

5.8.6*. Решите задачи 5.8.5 в случае, когда первоначально тангенс угла падения равен $1/m$, где m — целое число.

1 Введение

Введем оси x, y вдоль сторон соседних квадрата, в котором первоначально перемещается атом. Ось x направлена вправо по нижней стороне, y — вверх по левой стороне, если смотреть на квадрат прямо. Атом стартует с середины нижней стороны и летит сначала на правую сторону квадрата. Стороны квадрата a .

Угол падения для удобства считаем прилежащий к правой стороне квадрата, поэтому получается $\operatorname{tg} \alpha_0 = m$ (это справедливо, например, если угол падения в условии отсчитывали от нормали к первой точке столкновения с правой стеной).

2 Условие замкнутости

Введем понятие периода движения по оси. Период по оси — время, за которое тело делает одно колебание по данной оси. Периоды по осям x, y обозначим T_x, T_y .

Чтобы траектория была замкнута, нужно чтобы периоды относились как целые числа (ср. задачу 3.4.9 (Савченко)). Можно исследуемые траектории называть ломаными фигурами Лиссажу (ср. задачу 3.4.11).

Посмотрим, как с этим связан тангенс угла падения:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_x}{v_y} = \frac{\frac{2a}{T_x}}{\frac{2a}{T_y}} = \frac{T_y}{T_x} = \frac{p}{q},$$

где v_x, v_y — скорости по осям x, y , а p, q — целые числа, не имеющие общего делителя.

То есть тангенс угла падения для замкнутости должен быть рациональным числом [2].

Для первоначального угла падения

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = m.$$

Для угла падения $\alpha_0 + \Delta$, тангенс которого мало отличается от m для замкнутости можно записать

$$M = \operatorname{tg}(\alpha_0 + \Delta) = \frac{p}{q} = m + \frac{k}{n},$$

где $\frac{k}{n}$ — также рациональная дробь и несократимая, причем $n \gg k$.

В случаях тангенса, не представимого в данном виде, замкнутости нет, тангенс оказывается иррациональным числом (и $M = m + i$, где i — иррациональное)!

3 Пункт а

Сначала получим связь Δ с k, n .

С учетом тригонометрии [3] при замкнутости для тангенса суммы

$$M \approx \frac{m + \Delta}{1 - m\Delta} = m + \frac{k}{n}.$$

Рамочную формулу преобразуем в модели чисел $\boxed{m \sim 1}$ и получим приближенно

$$\boxed{\Delta \approx \frac{k}{n(1 + m^2)}}. \quad (1)$$

(Это удовлетворяет результату случая $m = 1$ в задаче 5.8.5.)

Если M так не представима как m плюс рациональное, то траектория незамкнута.

Теперь рассчитываем среднюю скорость места удара по каждой стене.

3.1 Средняя скорость

Для этого найдем смещение точки за один период по «медленной оси» (в нашем случае медленная ось y). Это будут шаги, которые делает точка удара относительно начальной точки. Рассуждения делаем прямо в рамках квадрата по ломанной траектории.

Итак у нас какой-то угол $\alpha_0 + \Delta$, который дает тангенс, обозначаемый

$$M = \operatorname{tg}(\alpha_0 + \Delta) = m + \frac{k}{n}.$$

Рассмотрим пошагово один подъем до верхней стороны квадрата с начала.

- До первого столкновения по оси y подъем на

$$\frac{a}{2M}.$$

- Затем еще $m - 1$ участков по высоте $\frac{a}{M}$ записываем как

$$(m - 1) \frac{a}{M}.$$

- И еще остаток O как a минус предыдущие. После упрощения

$$O = a - \frac{a}{M} \left(m - \frac{1}{2} \right).$$

После этого получаем смещение по оси x относительно начальной координаты, когда точка оказалась на верхней стороне:

$$\delta_{\text{в}} = O \cdot M - \frac{a}{2} = a(M - m).$$

После снижения до нижней смещение относительно начального по x равно

$$\boxed{\delta = 2a(M - m)}.$$

Величину δ назовем смещением точки удара за цикл (за период по оси y).
Время на накопление δ есть один период T_y :

$$T_y = \frac{2a}{v \cos(\alpha_0 + \Delta)},$$

с тригонометрией, обозначениями и приближениями переписать:

$$T_y = \frac{2a}{v} \sqrt{M^2 + 1} \approx \frac{2a}{v} \sqrt{m^2 + 1}.$$

Итак, средняя скорость перемещения удара по нижней стене

$$v'_x = \frac{\delta}{T_y} = \frac{v(M - m)}{\sqrt{m^2 + 1}},$$

что с учетом (1)

$$\boxed{v'_x \approx v \Delta \sqrt{m^2 + 1}}.$$

А средняя скорость перемещения удара по вертикальной стене по геометрии получается делением предыдущей на m :

$$\boxed{v'_y \approx \frac{v \Delta \sqrt{m^2 + 1}}{m}}.$$

(Это удовлетворяет результату случая $m = 1$ в задаче 5.8.5.)

Если $M = m + i$, где i — иррациональное, то результат получается такой же для скоростей.

3.2 Расстояния отстояния

Посмотрим на выходящие прямые из точки удара, сдвигающейся по нижней стороне, в процессе вырисовывания траектории и заметим по геометрии, что параллельные прямые отодвигаются после ближайших $1, 2, 3, \dots$ циклов на

$$h_0 = \delta \cos(\alpha_0 + \Delta),$$

что по упрощениям выше дает

$$h_0 = 2a\Delta\sqrt{1+m^2}.$$

Так все время, если каждый следующий ряд из δ на стороне квадрата ложится своими стыками на предыдущий ряд из δ (отражения от стен). В общем случае это не так и нужно найти, как каждое δ первого ряда делится стыками новых таких рядов после отражений от стен.

Сначала стоит определить связь условия замыкания с длинами δ, a . Внутри квадрата с ломаной траекторией это сложно. Поэтому приходим к методу «выпрямить кривое» — каждый раз при столкновении после начала движения атома по симметрии отражения продолжаем траекторию по прямой через стену в отраженный квадрат относительно стены столкновения. Все это происходит как на бесконечной сети с ячейкой $a \times a$ и измерения проводить удобно. Это используется в теории *математических бильярдov* [4].

Теория мат. бильярдov подтверждает, что замыкание траектории будет тогда, когда луч из начальной точки на бесконечной указанной сети попадет в такую же точку на некоторой ячейке, копии исходного квадрата, на нечетной горизонтальной прямой сети (это отображения исходной стороны квадрата, отсчет номеров горизонтальных прямых с единицы с прямой на исходной стороне квадрата).

Заметим, что по анализу пересечения луча на нечетных горизонтальных прямых сети для такого замыкания на бесконечной сети точка удара проходит в общем *целое число длин a , на которых будет уместиться целое число длин δ* . Из числа содержания δ в одном a

$$\frac{a}{\delta} = \frac{1}{2} \frac{1}{M-m} = \frac{n}{2k} \gg 1$$

(это число может быть не целым!) видим, что для замыкания нужно пройти длину a столько раз x , сколько раз x нужно взять дробь $\frac{n}{2k}$, так чтобы $x\frac{n}{2k}$ стало целым.

Число проходов x зависит от четности n .

- Если n — четное, то нужно пройти $x = k$ раз по расстоянию a .

В этом случае замкнутой траектории, так как каждый раз сдвиг ближайших рядов ударов на одно и то же расстояние меньше δ , по равномерности заполнения траекторией квадрата минимальное расстояние отстояния прямых соседних друг от друга равно

$$h_1 = \frac{2a\Delta\sqrt{1+m^2}}{k}$$

или с приближением формулы (1) для Δ

$$h_1 = \frac{2a}{n\sqrt{1+m^2}}$$

и в приближении не зависит от числа k !

- Если n — нечетное, то нужно пройти $x = 2k$ раз по расстоянию a .

В таком случае замкнутой траектории аналогично минимальное расстояние отстояния прямых соседних друг от друга равно

$$h_1 = \frac{2a\Delta\sqrt{1+m^2}}{2k}$$

или с приближением формулы (1) для Δ

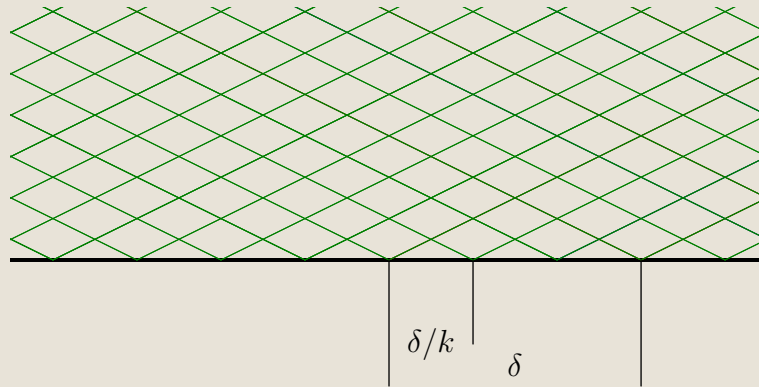
$$h_1 = \frac{2a}{2n\sqrt{1+m^2}}$$

и в приближении тоже не зависит от числа k !

(Отличается от ответа задачника и от ответа задачника при условии $m = 1$ в задаче 5.8.5.)

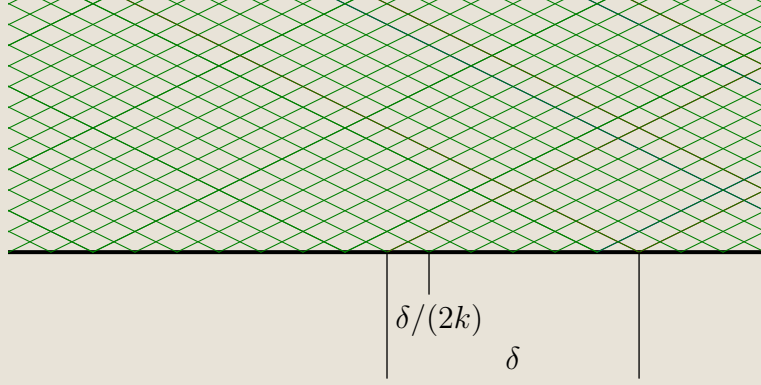
Для быстрой частной проверки принципа дробления шага δ на k или $2k$ частей при полном замыкании траектории далее два рисунка.

На следующем одном рисунке для четного(!) $n = 100$ (число траектории $M = m + k/n = 2 + 3/100$) показан размер дробления $\delta/k = 2a/n$, вычисленный по этой формуле, на который дробится δ при полном замыкании траектории вблизи начала движения (увеличение области у начала движения, весь квадрат $a \times a$ не виден); картина параллельных прямых есть часть общей траектории, построенной независимо программно по законам отражения.



$M = m + k/n = 2 + 3/100$, размер дробления $\delta/k = 2a/n$ согласован

На следующем одном рисунке для нечетного(!) $n = 101$ (число траектории $M = m + k/n = 2 + 3/101$) показан размер дробления $\delta/(2k) = 2a/(2n)$, вычисленный по этой формуле, на который дробится δ при полном замыкании траектории вблизи начала движения. (Размер и масштаб области как в предыдущем рисунке.)



$M = m + k/n = 2 + 3/101$, размер дробления $\delta/(2k) = 2a/(2n)$ согласован

Если траектория не замкнута, вся поверхность квадрата заполняется и расстояние параллельных прямых равно

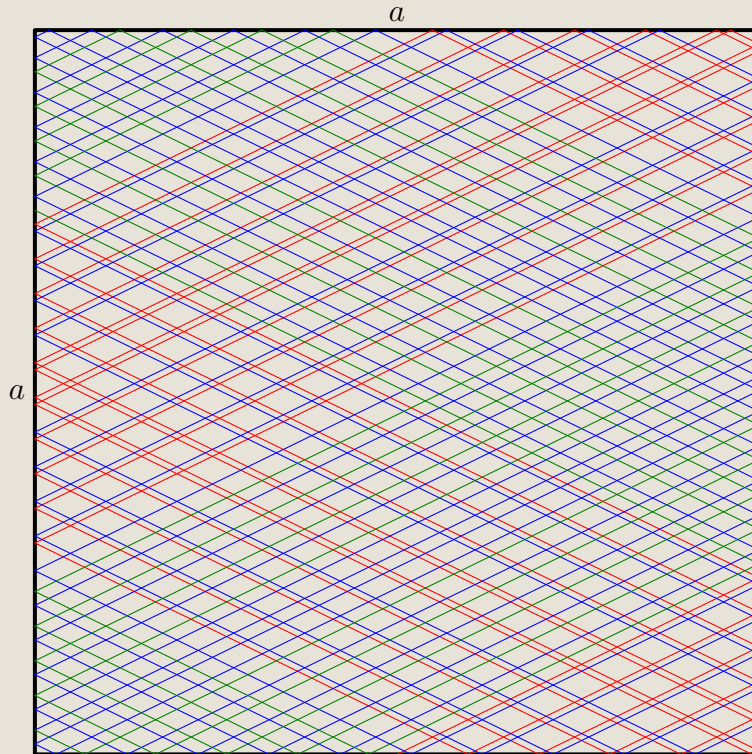
$$h_2 = 0.$$

3.3 Галерея

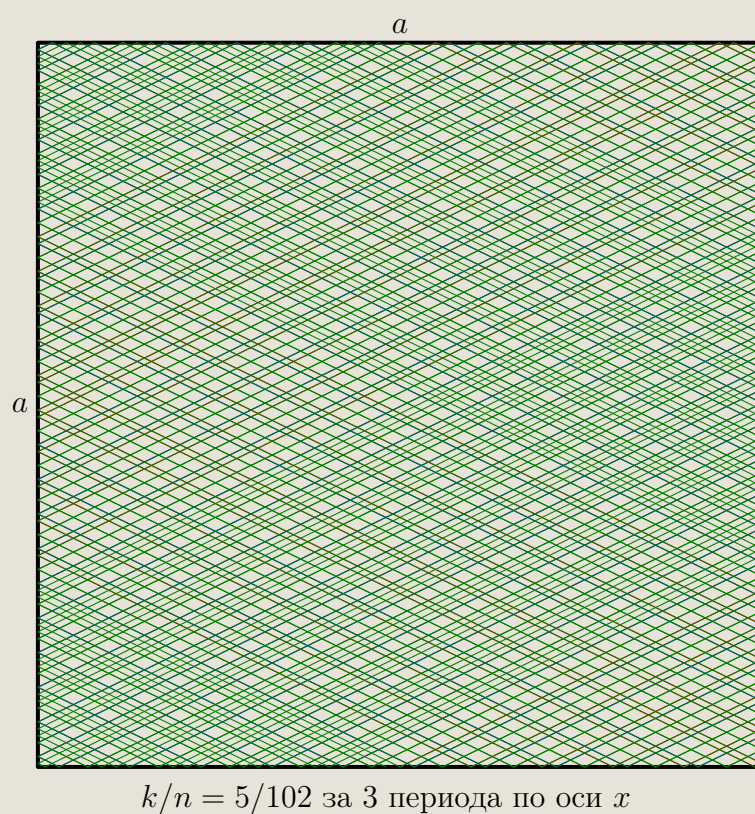
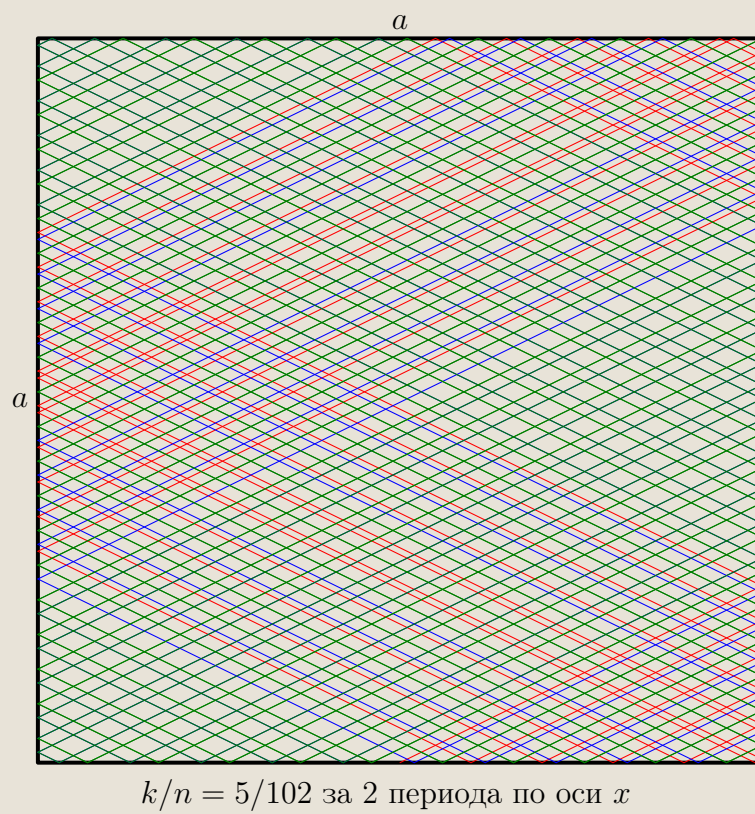
Здесь покажем траектории атома с указанием начальных условий при разных

числах $M = 2 + \frac{k}{n}$.

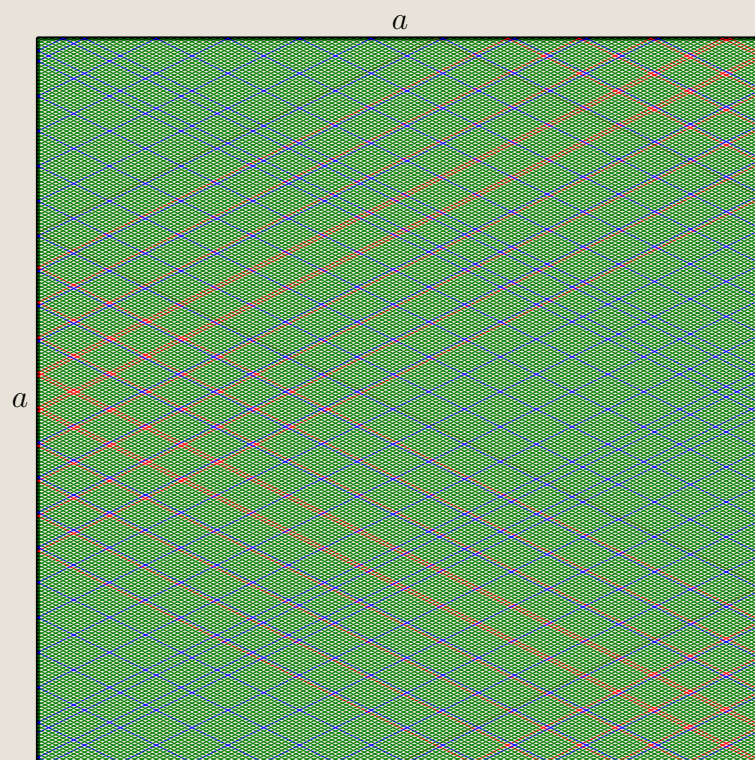
Следующие три рисунка показывают траекторию при $k/n = 5/102$ за 1, 2, 3 периода по оси горизонтальной соответственно; начало в середине нижней стороны, скорости $v_x/v_y = M$, начальная скорость вправо вверх. На рисунках красный набор прямых — движение точки удара вправо после начала, синий набор — движение далее от правой стены к левой, зеленый набор — дальнейшее движение после второй смены направления движения точки удара на левой стене.



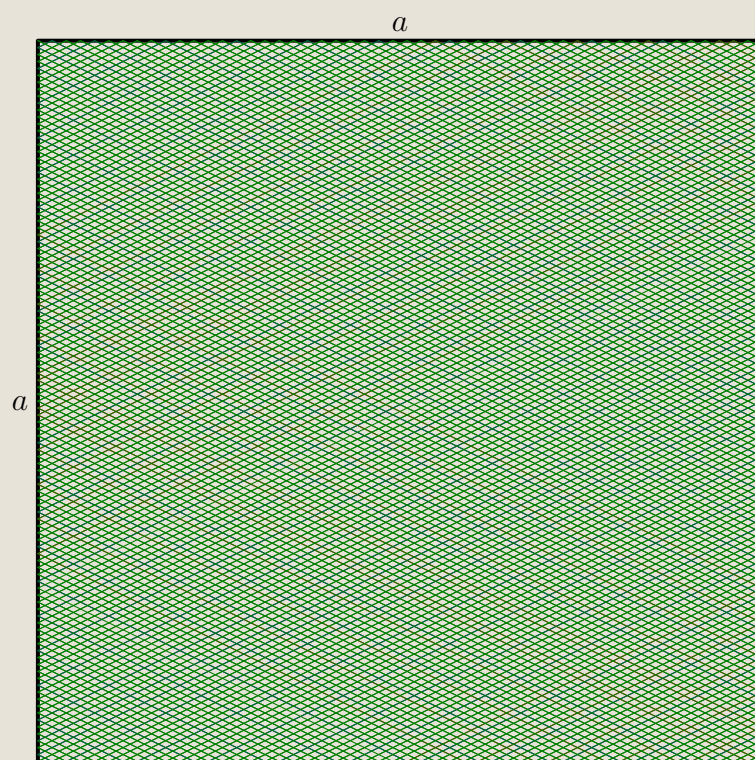
$k/n = 5/102$ за 1 период по оси x



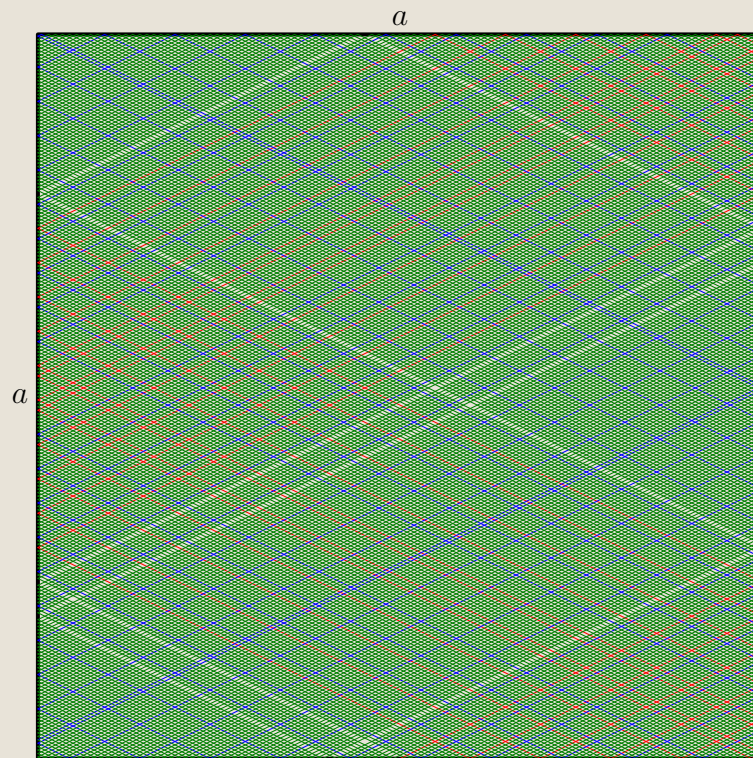
Следующие рисунки подтверждают выраженную зависимость h_1 от четности n . При четном n расстояние между параллельными соседними больше практически в 2 раза, чем при ближайшем нечетном n . Показаны полные заполнения квадрата (достигнуто замыкание).



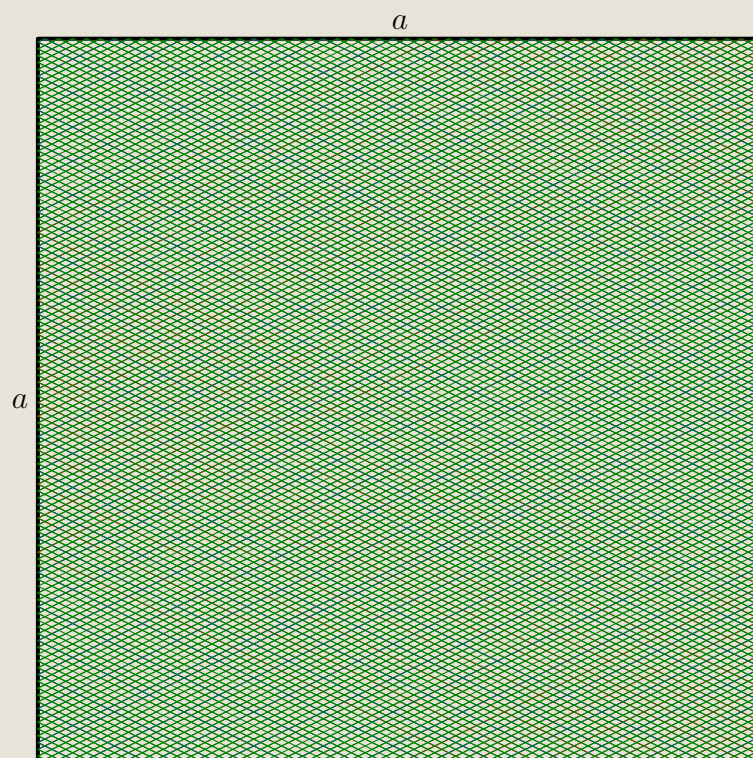
$k/n = 5/101$, нечетное n , заполнено



$k/n = 5/102$, четное n , заполнено

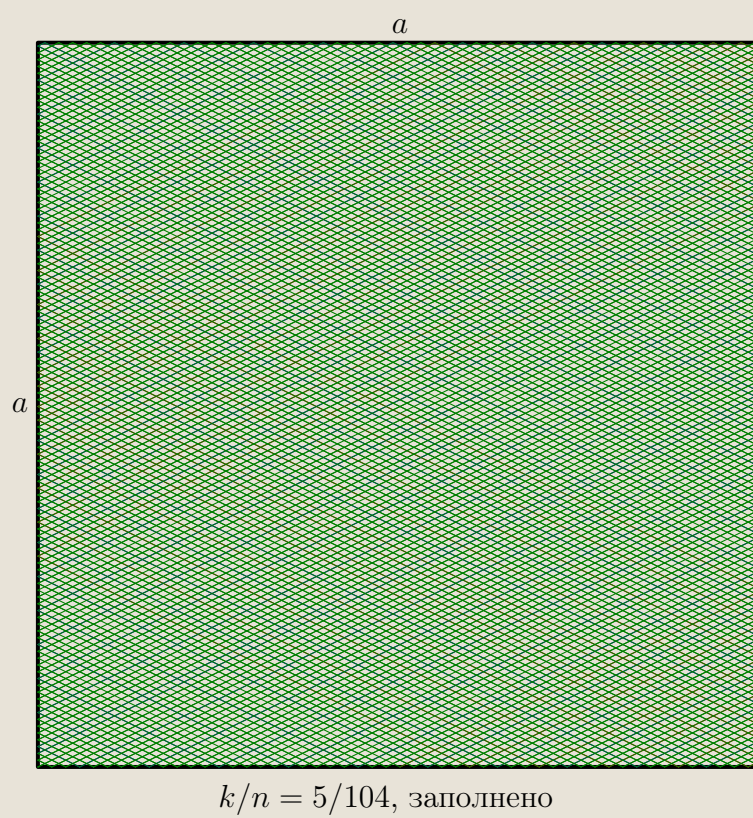
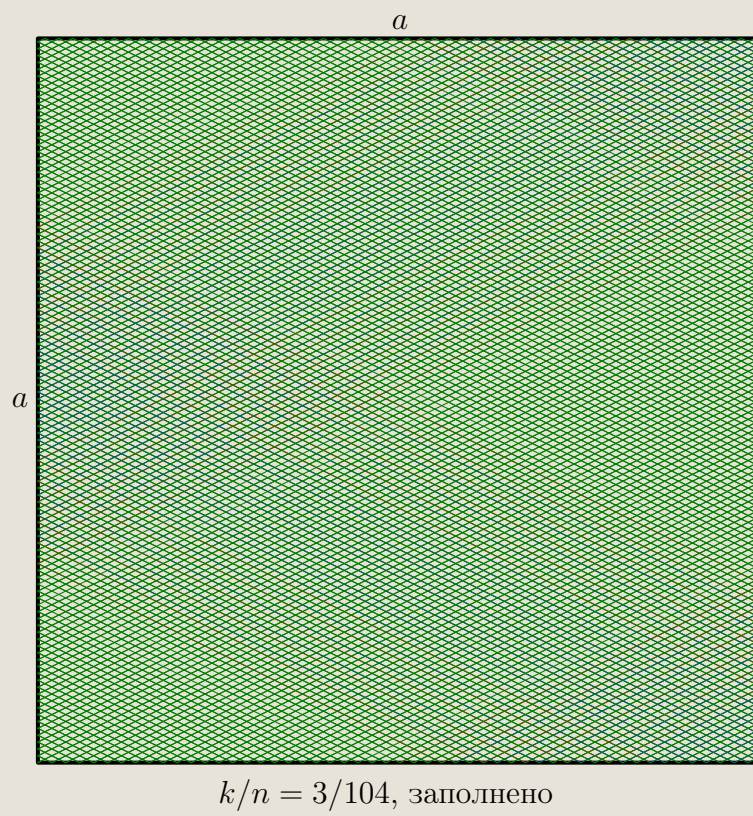


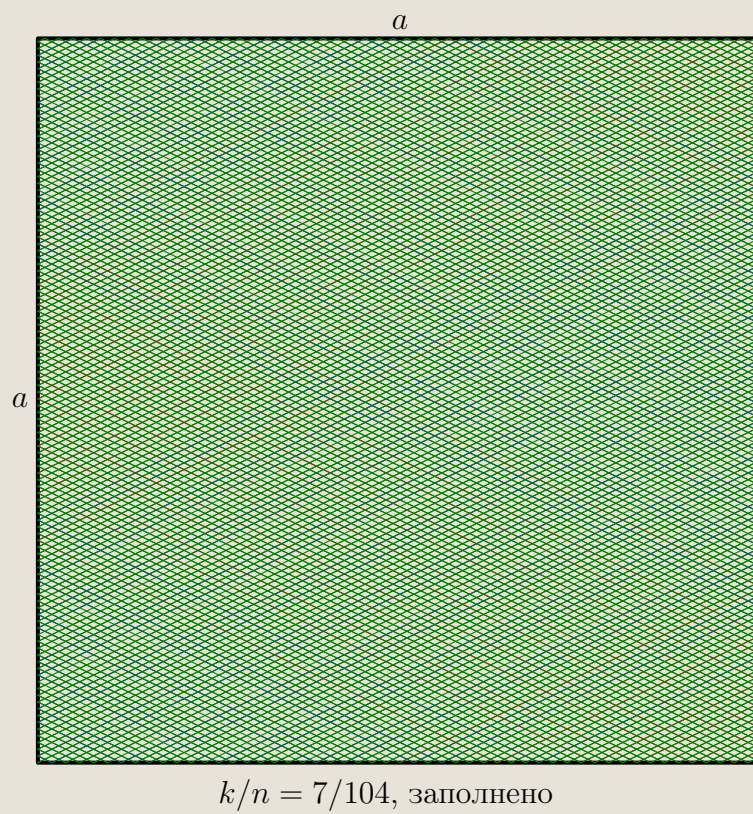
$k/n = 5/103$, нечетное n , заполнено



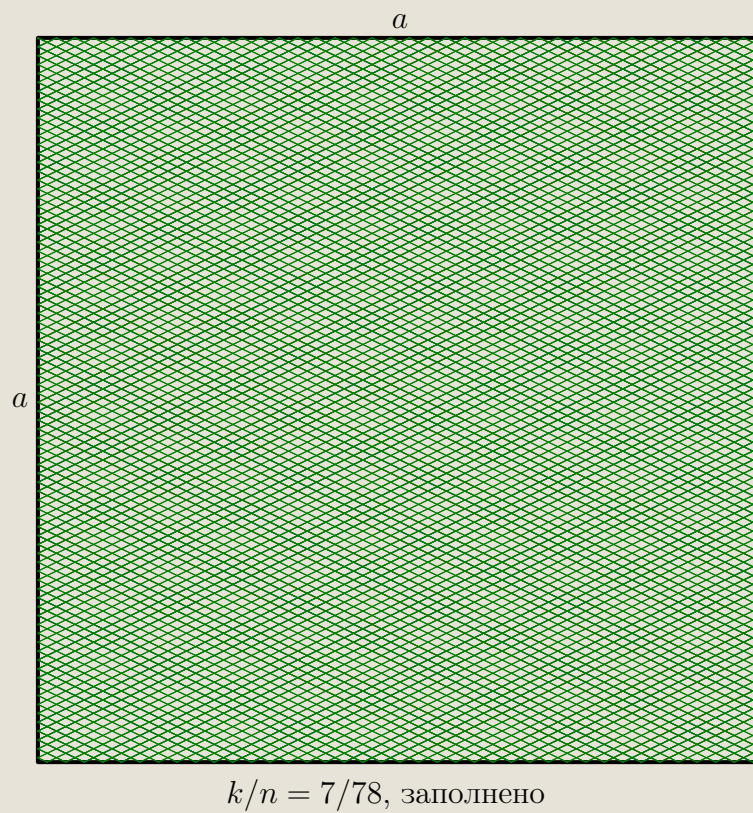
$k/n = 5/104$, четное n , заполнено

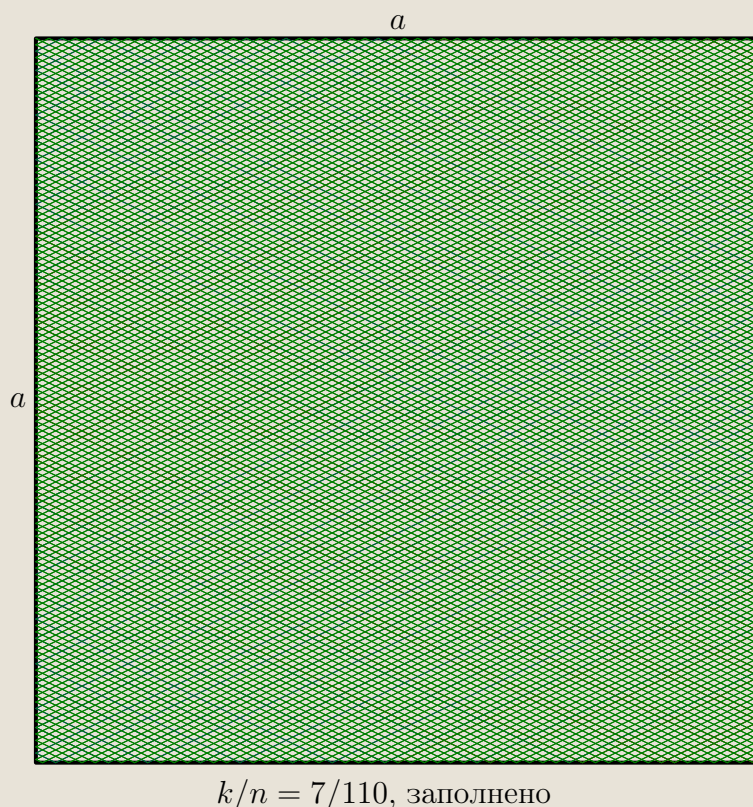
Следующие рисунки подтверждают приближенную независимость(!) расстояния h_1 от числа k на примерах чисел $k/n = 3/104, 5/104, 7/104$ с полным заполнением.





На следующей паре рисунков коротко отметим приближенную обратную зависимость h_1 от n (на сколько возможно явно и на сколько возможно близко к модели).





4 Пункт б

Невероятно, чтобы $\operatorname{tg}(\alpha_0 + \Delta)$ был точно равен целое m плюс простая дробь, например $0,03$, так как вблизи этого числа может быть сколько угодно других чисел, например чисел типа $m + 0,03 + \sqrt{2}/n$, n — целое число, которые сколько угодно мало отличаются от $m + 0,03$. Эти числа называются иррациональными, и в математике доказывается, что множество этих чисел более мощно, чем множество простых дробей. Если число иррационально, то траектория не замкнута.

$$p = S/a^2.$$

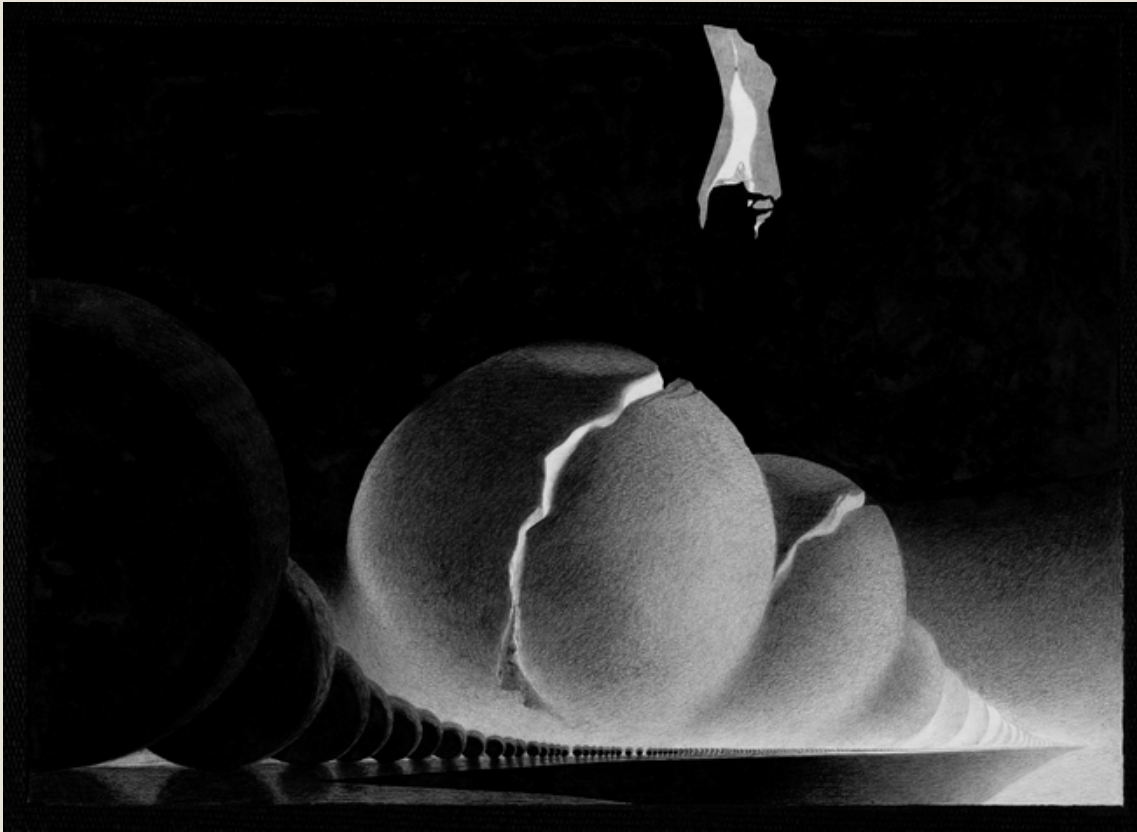
5 Пункт в

В плоскости, перпендикулярной квадрату, аналогично пункту б невероятно, чтобы $\operatorname{tg}(\Delta)$ был точно равен простой дроби, поэтому объем куба заполняется полностью (эта плоскость также заполняется следами проекции точки на нее).

$$p = \frac{V}{a^3}.$$

(Знатоки добавляют сюда про теорию вероятностей и еще что-то.)

Следующая иллюстрация — картина «Бильярд. Клеточные комплексы» профессионального математика — Фоменко, Анатолий Тимофеевич, он также художник, выполняющий фантастические рисунки на вдохновении профессиональных математических и физических идей (из книги «Математика и миф сквозь призму геометрии» [5]).



Литература

- [1] И. И. Воробьев, П. И. Зубков, Г. А. Кутузова, О. Я. Савченко, А. М. Трубачев и В. Г. Харитонов. *Задачи по физике*. Новосибирск: Новосибирский государственный университет, 2008.
- [2] М. И. Башмаков, Б. М. Беккер и В. М. Гольховой. *Задачи по математике: алгебра и анализ*. Библиотечка «Квант», 1982.
- [3] И. Яковлев. *Тригонометрические формулы*. 2014.
- [4] Г. А. Гальперин и А. Н. Земляков. *Математические бильярды (бильярдные задачи и смежные вопросы математики и механики)*. Библиотечка «Квант», 1990.
- [5] А. Т. Фоменко. *Математика и миф сквозь призму геометрии*. МГУ, 2001.
- [6] Ю. М. Волченко. *Научная графика на языке Asymptote*. 2018.
- [7] Charles Staats III. *Пособие по Asymptote*. 2022.