

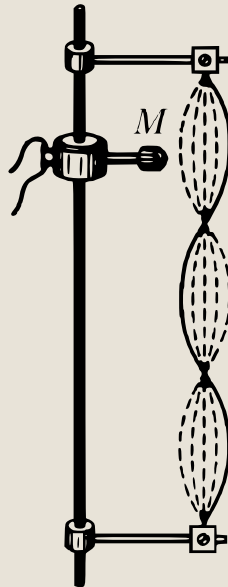
Струна и магнит

И. И. Кравченко

31 августа 2026 г.

Решаем задачу по физике про раскачивание колебаний струны из сборника Савченко [1]. Опубликовано впервые на «[Savchenko Solutions](#)».

3.9.22. Колебания в струне возбуждают, пропуская по ней переменный ток так, что магнитная сила со стороны небольшого магнита M меняется гармонически. Частота тока отвечает третьей гармонике струны. Длина струны L . Где нужно поместить магнит, чтобы амплитуда колебаний была наибольшей?



1 Введение

Технический подход. Магнит действует на такой малый участок, что посчитаем его предельно жестким и безмассовым. Тогда можно считать в месте действия магнита тонкая безмассовая стенка, на которой должны выполняться определенные граничные условия. В такой постановке задача аналогична задаче о вынужденных колебаниях воздуха в трубе из-за колебания тонкого безмассового поршня в произвольном месте внутри трубы [2] (пар. 67).

2 Две стоячие волны

Пусть один конец струны в координате $x = 0$. Другой в $x = L$. Магнит действует на малый участок в координате x_1 , где $0 < x_1 < L$.

По сказанной идее считаем, что на участках, отделенных координатой x_1 , образуются свои стоячие волны.

На участке с координатами от 0 до x_1 устанавливается своя стоячая волна напряжения с учетом, что в $x = 0$ напряжение максимально:

$$\sigma_A = A \cos kx,$$

где A — амплитуда напряжения этой в стоячей волне, $k = 2\pi/\lambda$ (временной частью напряжения не интересуемся).

На участке с координатами от x_1 до L с учетом, что в $x = L$ напряжение максимально:

$$\sigma_B = B \cos [k(x - L)],$$

где B — амплитуда напряжения в этой стоячей волне, $k = 2\pi/\lambda$ (временной частью напряжения не интересуемся).

Величины A, B — амплитуды алгебраические (могут быть отрицательными) из-за неоднозначности выбора между законом положительного и отрицательного косинуса в формуле напряжения.

По $\sigma = \rho v c$ (как $p = \rho v c$) и тому, что скорость в волне стоячей по координате отстает от давления на $\pi/2$ (следствие дифференцирования, например). В волне для дальнейшего запишем законы скорости в волнах напряжений σ_A, σ_B соответственно

$$v_A = \frac{A}{\rho c} \sin kx$$

и

$$v_B = \frac{B}{\rho c} \sin [k(x - L)].$$

3 Граничные условия

Пусть амплитуда напряжения со стороны магнита σ^* , тогда на безмассовом участке его действия по второму закону Ньютона

$$\sigma_A(x_1) - \sigma_B(x_1) = \sigma^*. \quad (1)$$

А неразрывность концов струны в точке x_1 требует равенство скоростей

$$v_A(x_1) = v_B(x_1). \quad (2)$$

Используя формулы предыдущие по условиям (1), (2) находим сначала для величины B :

$$B = \sigma^* \frac{\sin kx_1}{\sin(-kL)}$$

и далее

$$A = \sigma^* \frac{\sin[k(x_1 - L)]}{\sin(-kL)}.$$

4 Резонанс

У нас по задаче

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{L}{3}.$$

Это приводит к тому, что знаменатели выражений для A, B равны нулю и амплитуды напряжения стремятся к бесконечности независимо(!) от положения магнита в модели без потерь и точной частоте третьей гармоники струны! Бесконечны в таком случае и амплитуды колебаний.

Если в системе есть потери или частота не точно равна одной из собственных частот струны, то знаменатели A, B не равны нулю, и чтобы максимизировать значения A, B нужно максимизировать их числители (максимизируется и амплитуда колебаний).

Поиск максимумов указанных числителей дает допустимые максимизирующие значения x_1 :

$$x_1 = \frac{L}{6}, \frac{L}{2}, \frac{5L}{6}.$$

Ответ по изданию 1981 г.

Литература

- [1] И. И. Воробьев, П. И. Зубков, Г. А. Кутузова, О. Я. Савченко, А. М. Трубачев и В. Г. Харитонов. *Задачи по физике*. Новосибирск: Новосибирский государственный университет, 2008.
- [2] М. А. Исакович. *Общая акустика*. Наука, 1973.
- [3] И. Яковлев. *Тригонометрические формулы*. 2014.
- [4] И. Е. Иродов. *Волновые процессы*. Бином, 2015.
- [5] Д. В. Сивухин. *Общий курс физики. Механика*. Наука, 1979.
- [6] Д. В. Сивухин. *Общий курс физики. Электричество*. Наука, 1979.