

Волны и границы

И. И. Кравченко

10 октября 2026 г.

Решаем три связанные задачи по физике о прохождении волн через границы сред из сборника Савченко [1]. Написано для «Savchenko Solutions».

1 «Эхо-сигналы»

3.8.17. На плоскую стенку толщины l перпендикулярно ее поверхности падает звуковой сигнал, протяженность которого много меньше l . Из-за многократных отражений сигнала от границ стенки появляется последовательность вторичных сигналов («эхо-сигналов»), амплитуда которых убывает в геометрической прогрессии. Плотность среды, в которой находится стенка, и самой стенки — соответственно ρ_1 и ρ_2 . Скорость распространения звука в среде и стенке соответственно c_1 и c_2 . Определите отношение амплитуды двух следующих друг за другом «эхо-сигналов» в среде за стенкой, а также расстояние между ними.

Коэффициенты прохождения и отражения волны по амплитуде найдены при решении задачи 3.8.14 (Савченко).

Рассмотрим циклы. Произведения $\rho_1 c_1, \rho_2 c_2$ обозначаем x_1, x_2 .

- Цикл 0. Особенный цикл. Волна впервые вошла в среду 2. Начальная амплитуда A в первой среде. Ее амплитуда в среде 2 стала

$$A_2^{(0)} = A \cdot k_{\text{Апр}}_{1 \rightarrow 2} = A \frac{2x_1}{x_1 + x_2},$$

где $k_{\text{Апр}}_{1 \rightarrow 2}$ — коэффициент прохождения по амплитуде (задача 3.8.14) из среды 1 в 2. Далее аналогично.

- Цикл 1. Волна проходит снова в среду 1 двигаясь в ту же сторону:

$$A_1^{(1)} = A_2^{(0)} \cdot k_{\text{Апр}}_{2 \rightarrow 1} = A \frac{4x_1 x_2}{(x_1 + x_2)^2}.$$

И генерируется отраженная в том месте в обратную сторону двигающаяся с амплитудой

$$A_2^{(1)} = A_2^{(0)} \cdot k_{\text{Аот}}_{2 \rightarrow 1} = A \frac{2x_1 (x_2 - x_1)}{(x_1 + x_2)^2}.$$

На левой границе опять генерируется отраженная, двигающаяся уже как изначальная с амплитудой

$$A_2^{(1)'} = A_2^{(1)} \cdot k_{\text{Аот}}_{2 \rightarrow 1} = A \frac{2x_1 (x_2 - x_1)^2}{(x_1 + x_2)^3}.$$

- Цикл 2. Сигнал проходит в среду 1 как в начале цикла 1.

$$A_1^{(2)} = A_2^{(1)'} \cdot k_{\text{Апп}} = A \frac{4x_1x_2(x_2 - x_1)^2}{(x_1 + x_2)^4}.$$

И так далее.

Геометрическая прогрессия задана в условии (можно показать). Тогда, сравнивая выражения для $A_1^{(1)}, A_1^{(2)}$ заключаем, что амплитуды i -ого и $i + 1$ -ого пройденного эхо относятся как

$$\frac{A_1^{(i)}}{A_1^{(i+1)}} = \frac{(\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2)^2}{(\rho_2 c_2 - \rho_1 c_1)^2}.$$

Расстояние между эхо-пакетами

$$L = c_1 \tau = c_1 \frac{2l}{c_2},$$

где τ — время, за которое отраженный пакет после отражения от правой границы, например, дойдет до левой границы плюс, плюс время, за которое вновь отраженный от левой границы пакет дойдет до правой границы.

2 Ряд сигналов

3.8.18*. На стенку (см. задачу 3.8.17) последовательно падают одинаковые звуковые сигналы. При каком расстоянии между ними амплитуда сигнала, прошедшего сквозь стенку, будет максимальной? Определите отношение максимальной амплитуды этого сигнала к амплитуде падающего сигнала. Изменится ли это отношение, если на стенку будет падать синусоидальная волна?

Это прямое продолжение задачи 3.8.17. В той задаче получили, что на выходе единичный входной сигнал дает ряд равноотстоящих друг от друга эхо-сигналов. Остается накладывать на них следующие ряды эхо-сигналов.

Это получится, когда каждый следующий входной сигнал будет достигать левой границы (входная) одновременно с приходящим отраженным от правой границы сигналом внутри стены. Два отражения единичного сигнала внутри стены восстанавливают форму бегущей синусоиды как входной сигнал и очередной входной накладывается синфазно с отраженным от левой границы.

Поэтому следовать входные должны на межсоседнем расстоянии

$$L = c_1 \frac{2l}{c_2}.$$

Чтобы была видна последовательность сделаем полностью как в задаче 3.8.17 через циклы. Произведения $\rho_1 c_1, \rho_2 c_2$ обозначаем x_1, x_2 .

- Цикл 0. Особенный цикл. Волна впервые вошла в среду 2. Начальная амплитуда A в первой среде. Ее амплитуда в среде 2 стала

$$A_2^{(0)} = A \cdot k_{\text{Апп}} = A \frac{2x_1}{x_1 + x_2},$$

где $k_{\text{Апп}}^{1 \rightarrow 2}$ — коэффициент прохождения по амплитуде (задача 3.8.14) из среды 1 в 2. Далее аналогично.

- Цикл 1. Волна проходит снова в среду 1 двигаясь в ту же сторону:

$$A_1^{(1)} = A_2^{(0)} \cdot k_{\text{Апп}}^{2 \rightarrow 1} = A \frac{4x_1x_2}{(x_1 + x_2)^2}.$$

И генерируется отраженная в том месте в обратную сторону двигающаяся с амплитудой

$$A_2^{(1)} = A_2^{(0)} \cdot k_{\text{Аот}}^{2 \rightarrow 1} = A \frac{2x_1(x_2 - x_1)}{(x_1 + x_2)^2}.$$

На левой границе опять генерируется отраженная, двигающаяся уже как изначальная и на нее накладывается очередная проходящая входная:

$$A_2^{(1)*} = A_2^{(1)} \cdot k_{\text{Аот}}^{2 \rightarrow 1} + A_2^{(0)} = A \frac{2x_1}{x_1 + x_2} \left(1 + \frac{(x_2 - x_1)^2}{(x_1 + x_2)^2} \right).$$

- Цикл 2. Сигнал с $A_2^{(1)*}$ проходит в среду 1 как в начале цикла 1.

$$A_1^{(2)} = A_2^{(1)*} \cdot k_{\text{Апп}}^{2 \rightarrow 1} = A \frac{4x_1x_2}{(x_1 + x_2)^2} \left(1 + \frac{(x_2 - x_1)^2}{(x_1 + x_2)^2} \right).$$

Далее еще отражение сигнала с $A_2^{(1)*}$ от правой границы, потом отражение от левой отраженного при таких же условиях и наложение очередной проходящей:

$$A_2^{(2)*} = A_2^{(1)*} \cdot \left(k_{\text{Аот}}^{2 \rightarrow 1} \right)^2 + A_2^{(0)} = A \frac{2x_2}{x_1 + x_2} \left(1 + \frac{(x_2 - x_1)^2}{(x_1 + x_2)^2} + \frac{(x_2 - x_1)^4}{(x_1 + x_2)^4} \right)$$

- Цикл 3. Сигнал с $A_2^{(2)*}$ проходит в среду 1 как в начале обычного цикла.

$$A_1^{(3)} = A_2^{(2)*} \cdot k_{\text{Апп}}^{2 \rightarrow 1} = A \frac{4x_1x_2}{(x_1 + x_2)^2} \left(1 + \frac{(x_2 - x_1)^2}{(x_1 + x_2)^2} + \frac{(x_2 - x_1)^4}{(x_1 + x_2)^4} \right).$$

Смотрим на формулы в рамках и видим, что проходящая выходная амплитуда растет по убывающей геометрической прогрессии.

На бесконечном цикле (используем формулу суммы для бесконечно убывающей прогрессии)

$$A_1^{(\infty)} = A \frac{4x_1x_2}{(x_1 + x_2)^2} \frac{1}{1 - \frac{(x_2 - x_1)^2}{(x_1 + x_2)^2}},$$

что после упрощения дает

$$A_1^{(\infty)} = A.$$

Амплитуда $A_2^{(\infty)}$ будет максимальной среди последовательных выходных, тогда отношение максимальной амплитуды из этих сигналов к амплитуде падающего сигнала равно

$$\frac{A_1^{(\infty)}}{A} = 1.$$

Синусоидальную волну можно рассматривать как непрерывное множество последовательностей сигналов с межсоседним расстоянием L , тогда ответ не изменится.

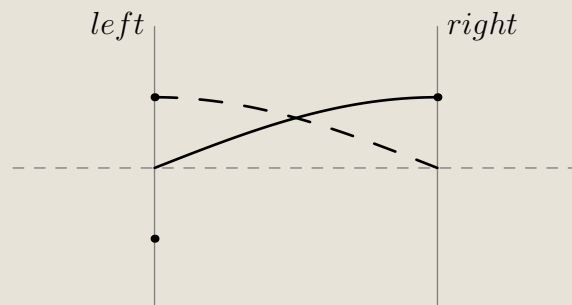
3 Звукоизолирующий экран

3.8.19. Ультразвуковая волна распространяется по воздуху в узком коридоре без заметного ослабления на большое расстояние. Коридор перегородили звукоизолирующим экраном некоторой толщины. При этом мощность проходящей волны уменьшилась во много раз. Затем вместо прежнего установили экран двойной толщины. Обнаружилось, что сквозь этот экран ультразвук проходит почти не ослабляясь. В чем тут дело? Частота волны 1 МГц, скорость звука в материале экрана 5 км/с. Найдите толщину звукоизолирующих экранов.

Эта задача есть развитие задач 3.8.17, 3.8.18. Рассуждаем в терминах амплитуды.

Рассмотрим первый случай ослабления.

Сначала рисунок-схема к тексту далее.



Пусть волна только вошла в среду 2 (экран). Эта пройденная волна дойдет до правой границы экрана (коротко — граница) отразится от нее и пойдет к левой границе (входная граница для основной волны), при этом знак амплитуды не меняется (задача 3.8.6). Если она в момент касания левой границы в противофазе накладывается на проходящую основную, то мы получаем ослабленную результирующую амплитуду как разность

- амплитуды проходящей от основной
- и амплитуды отраженной 2 раза от проходящей от основной.

Это только после первого цикла типа туда-сюда для волны внутри экрана. Остается посмотреть, что будет при каждом следующем цикле.

3.1 Циклы

Смотрим циклы. Множители ρc обозначены x .

- Цикл 0. Волна впервые вошла в среду 2. Начальная амплитуда A в первой среде. Ее амплитуда в среде 2 стала

$$A_2^{(0)} = A \cdot k_{\text{Апр}} = A \frac{2x_1}{x_1 + x_2}.$$

где $k_{\text{Апр}} = k_{1 \rightarrow 2}$ — коэффициент прохождения по амплитуде (задача 3.8.14) из среды 1 в 2. Далее аналогично.

- Цикл 1. Он заканчивается таким наложением. Пройденная в среду 2 от основной минус(!) пройденная на предыдущем цикле, 2 раза отраженная при одинаковых условиях:

$$A_2^{(1)/*} = A_2^{(0)} - A_2^{(0)} \cdot \left(k_{\text{Аот}} \right)_{2 \rightarrow 1}^2 = A_2^{(0)} \left(1 - \left(k_{\text{Аот}} \right)_{2 \rightarrow 1}^2 \right).$$

- Цикл 2. Он заканчивается таким наложением. Пройденная в среду 2 от основной минус(!) волна с $A_2^{(1)/*}$, 2 раза отраженная при одинаковых условиях:

$$A_2^{(2)/*} = A_2^{(0)} - A_2^{(1)/*} \cdot \left(k_{\text{Аот}} \right)_{2 \rightarrow 1}^2 = A_2^{(0)} \left(1 - \left(k_{\text{Аот}} \right)_{2 \rightarrow 1}^2 + \left(k_{\text{Аот}} \right)_{2 \rightarrow 1}^4 \right).$$

- Цикл ∞ . Он заканчивается тем, что у левой границы в экране результирующая имеет амплитуду (и идет к выходной границе):

$$A_2^{(\infty)/*} = A_2^{(0)} \left(1 - \left(k_{\text{Аот}} \right)_{2 \rightarrow 1}^2 + \left(k_{\text{Аот}} \right)_{2 \rightarrow 1}^4 - \left(k_{\text{Аот}} \right)_{2 \rightarrow 1}^6 + \dots \right).$$

Находим предыдущее по формуле бесконечно убывающей геом. прогрессии, считая $x_2 \gg x_1$.

$$A_2^{(\infty)/*} \approx A \frac{x_1}{x_2} \ll A.$$

Эта амплитуда пройдет через правую на выход с результатом

$$A_1^{(\infty)} = A \frac{x_1}{x_2} k_{\text{Апр}} = A \frac{2x_1}{x_2} \ll A.$$

Подтверждено ослабление.

3.2 Без ослабления

Соответственно, без ослабления прохождение в выход справа при двойной толщине (см. рис.-схему в введении).

- Цикл ∞ . Он заканчивается тем, что у левой границы в экране результирующая имеет амплитуду (и идет к выходной границе):

$$A_2^{(\infty)*} = A_2^{(0)} \left(1 + \left(k_{\frac{A_{\text{от}}}{2 \rightarrow 1}} \right)^2 + \left(k_{\frac{A_{\text{от}}}{2 \rightarrow 1}} \right)^4 + \left(k_{\frac{A_{\text{от}}}{2 \rightarrow 1}} \right)^6 + \dots \right).$$

Находим предыдущее по формуле бесконечно убывающей геом. прогрессии, считая $x_2 \gg x_1$.

$$A_2^{(\infty)*} \approx \frac{A}{2} \sim A.$$

Эта амплитуда пройдет через правую на выход с результатом

$$A_1^{(\infty)} = \frac{A}{2} k_{\frac{A_{\text{пр}}}{2 \rightarrow 1}} \approx A.$$

Подтверждено не(!) ослабление.

3.3 Толщины экранов

Из рис.-схемы в введении

$$l_1 = \frac{\lambda}{4} = \frac{c_2}{4\nu} = 1,25 \text{ мм}$$

и

$$l_2 = 2l_1 = 2,5 \text{ мм}.$$

Литература

- [1] И. И. Воробьев, П. И. Зубков, Г. А. Кутузова, О. Я. Савченко, А. М. Трубачев и В. Г. Харитонов. *Задачи по физике*. Новосибирск: Новосибирский государственный университет, 2008.
- [2] И. Е. Иродов. *Волновые процессы*. Бином, 2015.
- [3] Д. В. Сивухин. *Общий курс физики. Механика*. Наука, 1979.
- [4] Д. В. Сивухин. *Общий курс физики. Оптика*. Наука, 1980.
- [5] Ю. М. Волченко. *Научная графика на языке Asymptote*. 2018.
- [6] Charles Staats III. *Пособие по Asymptote*. 2022.