

# Столкновения стержней

И. И. Кравченко

31 августа 2026 г.

Решаем две связанные задачи по физике про наложение, прохождение и отражение волн из сборника Савченко [1]. Опубликовано впервые на «[Savchenko Solutions](#)».

## 1 Простое наложение

**3.8.11.** Два упругих стержня из одинакового материала и одинакового сечения, но разной длины  $l$  и  $L > l$  движутся навстречу друг другу со скоростью  $v$ . Определите скорость центров масс этих стержней после их столкновения.



По идее задачи 3.8.1 (Савченко) можем в каждом стержне вначале считать циркуляцию частичных бегущих волн ширины стержней, которые как змейки туда-сюда отражаются с учетом приема задачи 3.8.6 (при отражении меняется знак деформации). Каждая частичная прямоугольная волна перемещается по стержню противоположно другой частичной и имеет скорость частиц  $v/2$  в соответствующем направлении.

В момент касания эти частичные волны-змейки в месте контакта уже проходят без изменений.

Кто понял этот подход понимает, что сжатие короткого стержня заканчивается через время  $l/c$ , где  $c$  — скорость бегущих волн в стержнях.

Через  $2l/c$  короткий стержень разожмется и приобретет  $\boxed{v}$  влево (в общих чертах: в короткий вошла частичная волна сжатия длинного стержня со своей противоположной скоростью и после отражения от свободной границы короткого успела дойти до границы касания с деформацией противоположного знака).

Далее записываем закон сохранения импульса системы:

$$Mv - mv = mv + MV,$$

где  $V$  — проекция конечной скорости центра масс длинного на направление начальной скорости длинного.

Отсюда

$$V = v \left( 1 - 2 \frac{m}{M} \right)$$

и с учетом  $m/M = l/L$  для модуля:

$$\boxed{|V| = v |1 - 2l/L|}.$$

## 2 Сложное наложение

**3.8.12\*.** Происходит торцевое столкновение двух упругих стержней одинакового сечения. Рассмотрев волны сжатия, порожденные ударом, и отражение их от свободных концов, докажите, что результат соударения такой же, как и при лобовом абсолютно упругом ударе тел, если отношение длин стержней равно отношению скоростей звука в этих стержнях.

Стержни обозначим 1, 2. Пусть стержни ненапряженные вначале и сталкиваются с соответствующими скоростями  $v_1, v_2$ . Скорости далее как проекции считаются.

По способу решения задачи 3.8.11 можем в каждом стержне вначале считать циркуляцию частичных бегущих волн ширины стержней, которые как змейки туда-сюда отражаются с учетом приема задачи 3.8.6 (при отражении меняется знак деформации). Каждая частичная прямоугольная волна перемещается по стержню противоположно другой частичной и имеет скорость частиц  $v_1/2$  или  $v_2/2$  в соответствующем направлении.

### 2.1 Механизм

Из решений стандартных задач подобных можем угадать, что разлет удовлетворяющий условию будет также у стержней при ненапряженном состоянии. Простейший способ получить отсутствие деформации в стержнях такой.

После касания частичные волны стержней переходят с изменением в соседний стержень и отражаются обратно с изменением в тот же стержень, так как среды разные.

С учетом этого ненапряженное состояние появится точно через время

$$\frac{2l_1}{c_1} = \frac{2l_2}{c_2},$$

когда все частичные волны каждого стержня полностью пройдут в соседний и отразятся от границы (придется додуматься и читать теорию [2]).

Сразу после этого в стержнях волны скорости, дающие скорость стержней, которые находятся сложением находящихся в них частичных бегущих волн:

$$V_2 = k_{\text{пр}} \underset{1 \rightarrow 2}{v_1} + k_{\text{от}} \underset{2 \rightarrow 1}{v_2} \quad (1)$$

и

$$V_1 = k_{\text{пр}} \underset{2 \rightarrow 1}{v_2} + k_{\text{от}} \underset{1 \rightarrow 2}{v_1}, \quad (2)$$

где

- $k_{\text{пр}} \underset{i \rightarrow n}$  — коэффициент прохождения волны по скорости, показывающий как меняется скорость частичной бегущей волны при прохождении через границу в направлении из  $i$  в  $n$ ,
- $k_{\text{от}} \underset{i \rightarrow n}$  — коэффициент отражения волны по скорости, показывающий как меняется скорость частичной бегущей волны при отражении от границы при падении в направлении из  $i$  в  $n$ .

Эти коэффициенты введены для того, чтобы иметь дело с рассмотрением только волн скорости, так проще.

Теперь эти коэффициенты надо найти.

## 2.2 Коэффициенты

Пусть волна прямоугольная бегущая скорости  $v_{\text{п}}$  частиц падает на границу раздела двух сред 1, 2 плотностей и скоростей звука  $\rho_1, c_1$  и  $\rho_2, c_2$  из среды 1 в 2.

Войдя полностью в границу эта падающая дает две волны бегущие: отраженную и пройденную со скоростями частиц  $v_{\text{o}}$  и  $v_{\text{пр}}$ .

Пусть ширина падающей  $l_1$ , сечение сред  $S$  одинаково. Запишем закон сохранения энергии

$$\rho_1 v_{\text{п}}^2 l_1 S = \rho_1 v_{\text{o}}^2 l_1 S + \rho_2 v_{\text{пр}}^2 l_2 S$$

где  $l_2 = c_2 \tau$  (тут  $\tau = l_1 / c_1$  — время вхождения падающей в границу).

Закон сохранения импульса:

$$\rho_1 l_1 S v_{\text{п}} = \rho_1 l_1 S v_{\text{o}} + \rho_2 l_2 S v_{\text{пр}}.$$

Из предыдущих двух

- коэффициент прохождения по скорости

$$k_{\text{пр}} = \frac{v_{\text{пр}}}{v_{\text{п}}} = \frac{2\rho_1 c_1}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2}$$

или через массы короче

$$k_{\text{пр}} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}.$$

- коэффициент отражения по скорости

$$k_{\text{от}} = \frac{v_{\text{o}}}{v_{\text{п}}} = \frac{\rho_1 c_1 - \rho_2 c_2}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2}$$

или через массы короче

$$k_{\text{от}} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}.$$

**Это из среды 1 в 2.** Если падающая идет из среды 2 в 1, то индексы меняются  $1 \leftrightarrow 2$ .

## 2.3 Итог

В задачах динамики без потери на волны внутри тел получаются такие результаты для столкновения лобового и упругого. В тех же терминах тел 1, 2 при начальных  $v_1, v_2$  их скорости после соударения получаются по образу формул (1), (2):

$$u_1 = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$$

и

$$u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}v_2.$$

С учетом выражений для коэффициентов эти две скорости совпали со скоростями соответствующими (1), (2). Значит, стержни будут разлетаться как в простой динамике.

## 2.4 Дополнение

После касания скорости в частиц в стержнях в зонах вблизи границы раздела находятся через сложение (суперпозицию) частичных бегущих: начальная, отраженная и пройденная. Вот скорость в зоне первого стержня

$$v'_1 = \frac{v_1}{2} + k_{\text{от}} \frac{v_1}{2} + k_{\text{пр}} \frac{v_2}{2},$$

что дает скорость центра масс сталкивающихся стержней.

В зоне второго скорость такая же. Значит, стержни не отрываются, пока не придут в то ненапряженное состояние по формулам (1), (2), которое мы угадали.

## Литература

- [1] И. И. Воробьев, П. И. Зубков, Г. А. Кутузова, О. Я. Савченко, А. М. Трубачев и В. Г. Харитонов. *Задачи по физике*. Новосибирск: Новосибирский государственный университет, 2008.
- [2] Д. В. Сивухин. *Общий курс физики. Механика*. Наука, 1979.