

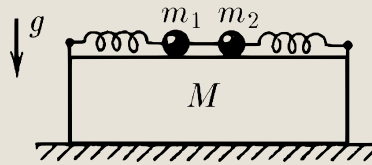
Лиссажу и числа

И. И. Кравченко

8 июля 2026 г.

Решаем задачу по физике про сложное наложение колебаний из сборника Савченко [1]. Опубликовано впервые на «Savchenko Solutions».

3.3.35. Два шарика массы m_1 и m_2 , прикрепленные к одинаковым пружинам, могут колебаться, скользя по бруску массы M без трения. Брусок лежит на горизонтальной плоскости. Шары связаны нитью, сила натяжения которой F . Нить пережигают. При каком наименьшем коэффициенте трения между плоскостью и бруском тот не сдвинется с места?



1 Введение

Считаем, брусок не двигается. После пережигания нити шары совершают гармонические колебания; силы их пружин меняются гармонически в пределах

$$[-F; F].$$

Отсчитываем время t от пережигания, ось x направим вправо. Со стороны левой пружины на брусок в проекции на x действует сила

$$f_1 = F \cos(\omega_1 t),$$

где ω_1 — угловая частота колебаний шара m_1 .

Со стороны правой пружины на брусок в проекции на x действует сила

$$f_2 = -F \cos(\omega_2 t),$$

где ω_2 — угловая частота колебаний шара m_2 .

Условие неподвижности бруска из второго закона Ньютона:

$$|f_1 + f_2| \leq \mu(M + m_1 + m_2)g,$$

где μ — коэффициент трения между плоскостью и бруском.

Максимальное возможное значение $|f_1 + f_2|$ не может превышать

$$2F.$$

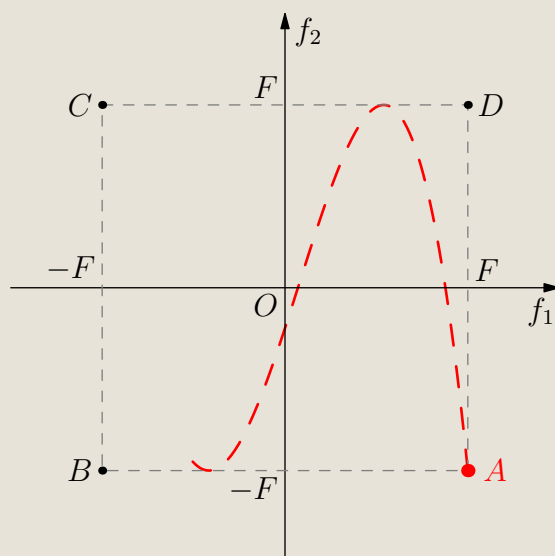
Можно обеспечить минимальный коэф. трения $\mu^* = 2F / [(M + m_1 + m_2)g]$, при котором брусок не сможет сдвинуться, но есть особенность в анализе соотношения частот колебаний сил f_1 и f_2 ...

2 Фигуры Лиссажу

При любых ли частотах достигается максимум $2F$ действия на брусок? Поможет фигура Лиссажу.

В системе перпендикулярных осей, где по одной оси откладывается значение f_1 , а по другой — значение f_2 в процессе колебаний, удобно вывести критерий достижения максимума $2F$.

Посмотрим на следующий рисунок, где показано начало вырисовывания фигуры Лиссажу для наугад подобранного соотношения частот колебаний $\omega_1 : \omega_2 = 1 : \pi$.



Точка, вычерчивающая фигуру Лиссажу в нашей задаче начинает движения из $A \equiv (F, -F)$. Интересующий максимум $2F$ действия будет в точках $B \equiv (-F, -F)$ и $D \equiv (F, F)$. Далее отдельно по этим точкам.

- В точку B фигура приходит, если в общем f_1 совершило $p + 1/2$ колебаний (где p — целое число), а f_2 совершило q колебаний (где q — целое число) за одно и то же время. Тогда для частот ν_1, ν_2 сил f_1, f_2 можно записать, преобразовывая,

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{2p + 1}{2q}.$$

Это отношение нечетное к четному. То есть частоты колебаний относятся как нечетное к четному числа.

- В точку D фигура приходит, если в общем f_1 совершило p колебаний (где p — целое число), а f_2 совершило $q + 1/2$ колебаний (где q — целое число) за одно и то же время. Тогда для частот ν_1, ν_2 сил f_1, f_2 можно записать, преобразовывая,

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{2p}{2q + 1}.$$

Это отношение четное к нечетному. То есть частоты колебаний относятся как четное к нечетному числа.

Итак, максимум действия $2F$ достигается при соотношении частот как четное к нечетному в общем!

3 Другие соотношения частот

Проверим другие соотношения частот по вышеприведенной диаграмме $f_1 O f_2$.

- Если частоты относятся как «четное-четное», то фигура приходит в A . Но отношение «четное-четное» сократимо, значит — оно сводится к случаям «четное-нечетное» или «нечетное-нечетное»! Про «четное-нечетное» понятно было, проверим «нечетное-нечетное».
- если частоты относятся как «нечетное-нечетное», то фигура не приходит в точки B и D . Значит при таком отношении максимум $2F$ действия не может быть!

Далее скажем про соотношение частот, которое не представимо дробью целых чисел, то есть про соотношение частот, являющееся иррациональным числом. Здесь нужно сказать про отсутствие замкнутости фигуры Лиссажу в таком случае. По фигуре Лиссажу пусть точка по одной оси совершила одно колебание, тогда по другой она совершила иррациональное число колебаний, то есть фигура не замкнулась, и относительно начальной точки мы не подберем такое целое число колебаний по одной оси так, чтобы по другой она также сделала целое число колебаний. Это справедливо для любой выбранной точки на диаграмме внутри прямоугольника, ограничивающего фигуру Лиссажу.

Незамкнутость фигуры Лиссажу в случае иррационального отношения частот приводит к тому, что в таком случае фигура Лиссажу в пределе большого числа колебаний заполняет всю прямоугольную область, ограничивающую колебания по взаимно перпендикулярным осям. Значит она сколь угодно близко подбирается и к точкам B и D с максимум $2F$ действия. Кроме того, в силу бесконечного числа иррациональных чисел между двумя целыми можно подобрать такое иррациональное соотношение частот, что приход фигуры Лиссажу в окрестности точек B и D может быть сколь угодно близким за заданное число колебаний по одной из осей.

4 Итог

Максимум $2F$ действия на брусок достигается при любом соотношении частот колебаний сил f_1, f_2 , кроме соотношения частот как нечетное к нечетному. Поэтому

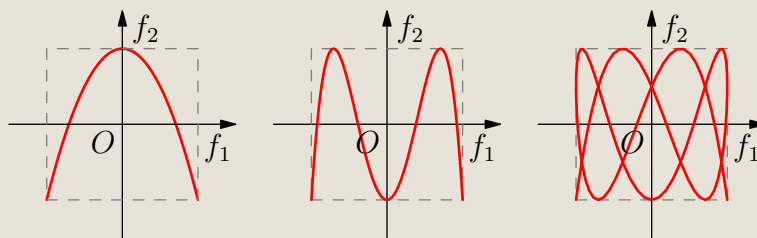
$$\mu_{\min} = \frac{2F}{(M + m_1 + m_2)g},$$

за исключением случая $\nu_1/\nu_2 = \sqrt{m_2/m_1} = p/q$, где p и q — есть нечетные числа. При этом мы исключаем случая возможности близких частот колебаний, так как тогда в процессе колебаний реализуется случай задачи 3.4.7 (Савченко) и фигура пройдет все точки внутри ограничивающего прямоугольника (вспомните «раздувания-сдувания» фигуры Лиссажу из решения 3.4.7).

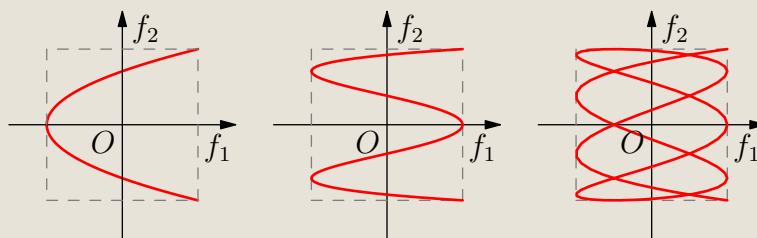
5 Галерея

Приведем примеры фигур Лиссажу для разных соотношений частот в рамках задачи.

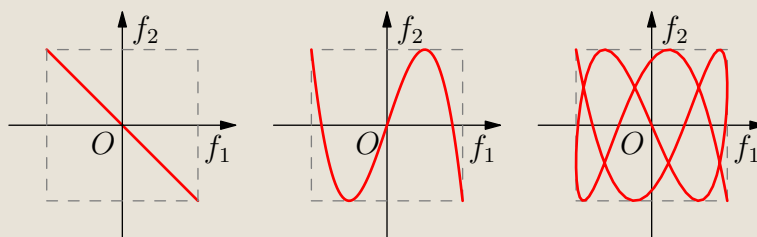
Нечетное к четному $\omega_1 : \omega_2$ (1 : 2, 1 : 4, 3 : 8):



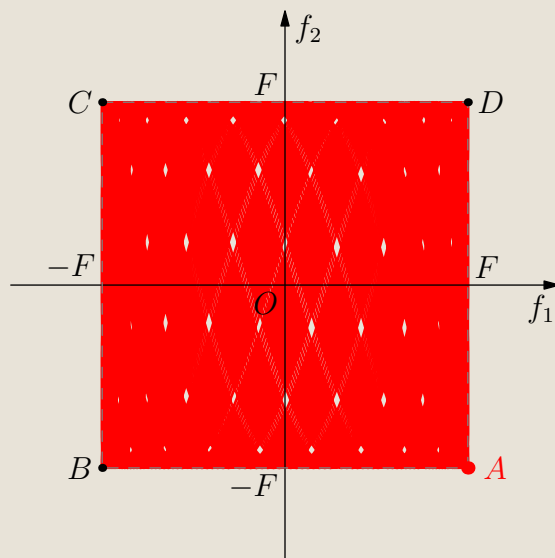
Четное к нечетному $\omega_1 : \omega_2$ (2 : 1, 4 : 1, 8 : 3):



Нечетное к нечетному $\omega_1 : \omega_2$ (1 : 1, 1 : 3, 3 : 7):



Иррациональное $\omega_1 : \omega_2 = 1 : \pi$ за 50 периодов колебаний по меньшей частоте:



Ближкие частоты $\omega_1 : \omega_2 = 29 : 31$:

