Вибрирующая поверхность

И. И. Кравченко, Е. Дубровин

24 июня 2026 г.

Решаем задачу по физике из сборника Савченко [1]. Опубликовано впервые на «Savchenko Solutions».

3.3.35. Поверхность тел, колеблющихся с ультразвуковой частотой, кажется скользкой на ощупь, а предметы, помещенные на эту поверхность, «плывут» по ней от малейшего приложенного к ним усилия. Объясните это.

1 Продольные колебания (Кравченко)

Пусть имеется горизонтальная поверхность с коэффициентом трения скольжения μ, которая колеблется вдоль прямой, проходящей через нее, с большой частотой ω. Указанную прямую назовем y, прямую, перпендикулярную ей и лежащую на поверхности, назовем x.

Далее, на поверхности в соприкосновении оказывается тело, движущееся в плоскости, параллельной колеблющейся поверхности. Обозначим скорость тела $\vec{V}$; проекции этой скорости на оси x, y равны V_x, V_y соответственно.

Кроме того, действие на тело усилия моделируется внешней силой $\vec{F}$, лежащей в плоскости, параллельной колеблющейся поверхности. Ее проекции на оси x, y равны F_x, F_y.

Скорость колеблющейся плоскости $\vec{v}$. Ее проекция на ось y меняется по закону

$$v_y = v_0 \sin(\omega t),$$

где v_0 — амплитуда скорости, разумеется $(v_x = 0)$.

Рассмотрим случай

$$\boxed{V \ll v_0, \quad V_x \sim V_y, \quad F_x \sim F_y.}$$

1.1 Движение вдоль оси колебаний

Изобразим качественный рисунок для определения силы трения скольжения $\vec{f}$, действующей на тело в плоскости его движения. Начнем с момента времени $t = 0$.

![К задаче 3.3.35

Сила $\vec{f}$, как можно показать, направлена вдоль скорости $\vec{v} - \vec{V}$ (это скорость плоскости относительно тела!).

Рассмотрим приближение постоянной скорости тела в течение одного периода T колебаний плоскости — то есть будем интересовать законом движения тела в элементах времени, равных T. Сам закон движения будем выводить из уравнения изменения импульса тела за время T [1,2].

В пределах одного периода начиная с момента $t = 0$ сила $\vec{f}$ будет меняться по направлению. Можно убедиться, что проекция этой силы на ось y будет равна

$$f_y = \mu mg \frac{v_0 \sin \omega t - V_y}{\sqrt{V_x^2 + (v_0 \sin \omega t - V_y)^2}}. \tag{1}$$

Можно заметить, что

$$f_y > 0 \quad \text{при } \tau < t < T/2 - \tau,$$

а также

$$f_y < 0 \quad \text{при } 0 < t < \tau$$

и

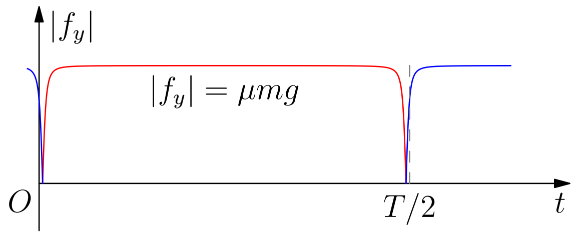
$$f_y < 0 \quad \text{при } T/2 - \tau < t < T,$$

где $\tau = \dfrac{V_y}{v_0 \omega}$ с учетом $V \ll v_0$ (это время, когда $f_y = 0$ в первый раз).

Упростим (1), поделив числитель и знаменатель на $v_0 \sin \omega t - V_y$; получим для модуля

$$|f_y| = \mu mg \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{V_x^2}{(v_0 \sin \omega t - V_y)^2}}}.$$

При условии $V \ll v_0$ зависимость $|f_y|(t)$ достаточно прямоугольная и, конечно, периодическая. Вот пример для $V_x = V_y = 0.03 v_0$ (Asymptote графика).



Величина $|f_y|$ очень быстро устанавливается на значении μmg, есть только кратковременные острые снижения до нуля. Случай $V_x \neq V_y$ не отличается принципиально. Красным цветом обозначено, когда проекция $f_y > 0$, синим — когда $f_y < 0$.

Теперь не будет большой ошибкой записать уравнение изменения импульса по оси y за время T:

$$F_y T + (\mu mg(T/2 - 2\tau) - \mu mg(T/2 + 2\tau)) = m \Delta V_y,$$

что превращается в

$$F_y - 4\mu mg \frac{V_y}{v_0 \omega} = m \frac{dV_y}{dt}$$

при рассмотрении $T \equiv dt$ для наблюдателя, не замечающего, что происходит со скоростью тела в течение периода T.

Величина $4\mu mg \dfrac{V_y}{v_0 \omega}$ эквивалентна силе сопротивления, зависящей от скорости V_y. Итак, для указанного наблюдателя по оси y скорость меняется так, как будто вдоль этого направления телу препятствует сила вязкого трения (как по воде).

1.2 Движение перпендикулярно оси колебаний

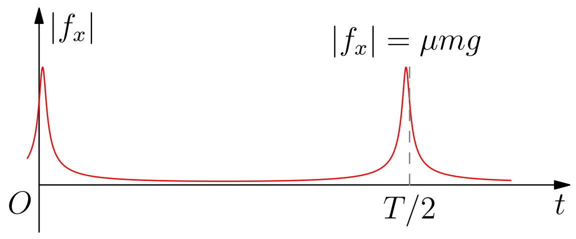
Учитывая предыдущее, проекция силы трения на ось x:

$$f_x = -\mu mg \frac{V_x}{\sqrt{V_x^2 + (v_0 \sin \omega t - V_y)^2}}$$

или

$$f_x = -\mu mg \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(v_0 \sin \omega t - V_y)^2}{V_x^2}}}.$$

Посмотрим на качественный график $|f_x|(t)$, допустим, для $V_x = V_y = 0.03 v_0$.



Величина $|f_x|$ за период T практически постоянно держится на уровне малом по сравнению с μmg. Лишь два раза за это время она испытывает кратковременные скачки до значения μmg. Случай $V_x \neq V_y$ не отличается принципиально.

Уравнение изменения импульса за время T по оси x можно записать так:

$$F_x T + \Delta p_x = m \Delta V_x, \tag{2}$$

где Δp_x — импульс проекции силы f_x за время T, равный отрицательной площади под графиком на рисунке зависимости $|f_x|(t)$ на интервале T.

Оценивая график указанной зависимости, говорим: практически $\Delta p_x \ll \mu mgT$. Можно представить, что Δp_x набирается некоторой эквивалентной постоянной проекцией силы трения на ось x, обозначим ее $\tilde{f}_x$, так что

$$\Delta p_x = \tilde{f}_x T,$$

и для этой проекции силы ввести эквивалентный коэффициент трения $\tilde{\mu}$ такой, что

$$\Delta p_x = -\tilde{\mu} mgT.$$

Тогда из вышесказанного $\tilde{\mu} \ll \mu$. Для наблюдателя, не замечающего, что происходит со скоростью тела в течении периода $T \equiv dt$, формула (2) переходит во второй закон Ньютона:

$$F_x - \tilde{\mu} mg = m \frac{dV_x}{dt},$$

где $\tilde{\mu} mg$ — эквивалент силы трения скольжения с малым коэффициентом трения. Движение по оси x для указанного наблюдателя напоминает движение по неподвижной поверхности, но с малым коэффициентом трения.

Связанные темы: маятник Капицы, быстрые и медленные движения, вибрация.

2 Поперечные колебания (Дубровин)

«Вингардиум Левиоса»

Гарри Поттер

В моём понимании поверхность тела колеблется с ультразвуковой частотой ω в вертикальном направлении! И если на тело поставить предмет, то это своего рода подбрасывание тела плитой, которая колеблется. В задаче 3.3.30. (Савченко) было показано, что предмет будет отрываться от тела на высоте $y = \frac{g}{\omega^2}$. Поскольку для ультразвука ω очень большое, то высота отрыва очень маленькая. Предмет, как бы постоянно парит (левитирует) над телом — между телом и предметом есть воздушная подушка. Через очень быстрое изменение высоты воздушного пространства воздух не успевает выходить из областей сжатия и разрежения, возникает подъёмная сила избыточного давления. Так как паря предмет не касается тела, то нет и силы трения, поэтому тело легко скользит без сопротивления.

Пусть поверхность совершает гармонические колебания:

$$z(t) = A \sin \omega t.$$

При малом зазоре $h(t)$ воздух сжимается. Давление можно оценить адиабатически:

$$P(t) = P_0 \left(\frac{h_0}{h(t)} \right)^\gamma = P_0 \left(\frac{h_0}{h_0 - z(t)} \right)^\gamma,$$

где P_0 — атмосферное давление, h_0 — средний зазор между предметом и вибрирующей поверхностью, γ — показатель адиабаты для воздуха (воздух можно считать двухатомным газом $\gamma = 7/5$).

Среднее давление даёт подъёмную силу:

$$F_{\text{под}} = \langle P(t) - P_0 \rangle \, S,$$

где S — площадь контакта.

Сила реакции опоры: $N = mg - F_{\text{под}}$, тогда сила трения: $F_{\text{тр}} = \mu N = \mu(mg - F_{\text{под}})$. Когда подъёмная сила сравняется с силой тяжести, сила трения устремится к 0.

На мой взгляд это и есть объяснение эффекта описанного в задаче. Можно пойти дальше и оценить подъёмную силу.

$$P(t) = P_0 \left(\frac{h_0}{h_0 - A \sin \omega t} \right)^\gamma = P_0 \left(1 - \frac{A}{h_0} \sin \omega t \right)^{-\gamma}$$

разложим в ряд при $\frac{A}{h_0} \ll 1$:

$$P(t) \approx P_0 \left[1 + \gamma \frac{A}{h_0} \sin \omega t + \frac{\gamma(\gamma + 1)}{2} \left(\frac{A}{h_0} \right)^2 \sin^2 \omega t \right].$$

Усредняя по времени, воспользуемся известными соотношениями: $\langle \sin \omega t \rangle = 0$ и $\langle \sin^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}$, тогда:

$$\langle P \rangle - P_0 = P_0 \frac{\gamma(\gamma + 1)}{4} \left(\frac{A}{h_0} \right)^2.$$

При $\gamma = 7/5$ получим:

$$\langle P \rangle - P_0 = \frac{21}{25} P_0 \left(\frac{A}{h_0}\right)^2.$$

Подъёмная сила:

$$\boxed{F_{\text{под}} = \frac{21}{25} P_0 S \left(\frac{A}{h_0}\right)^2}.$$

Теперь представим меня — мужчину в расцвете сил с доской площадью $1{,}8 \times 0{,}56 = 1$ м^2 и общей массой 90 кг. Амплитуда колебаний 1 мм. На какой высоте я буду парить? Подъёмная сила должна быть не меньше моего веса:

$$Mg = \frac{21}{25} P_0 S \left(\frac{A}{h_0}\right)^2 \Longrightarrow h_0 = A\sqrt{\frac{21 P_0 S}{25 Mg}} \approx 9.8 \text{ мм}.$$

[Картинка — человек на доске над вибрирующей поверхностью в помещении, похожем на машинный зал электростанции]

3 Дополнение (Кравченко, Дубровин)

В разделе 2 «Поперечные колебания» автор рассуждал в рамках квазистационарного (равновесного) состояния газа, составляющего воздушную подушку. Условие равновесности газа состоит в том, что время релаксации газа должно быть много меньше периода ультразвуковых колебаний. Говоря иначе, характерное время распространения возмущений, стремящихся выравнять макроскопические параметры газа по всему его объему, должно быть много меньше указанного периода колебаний. Для воздушной подушки это можно записать так:

$$\frac{h_0}{c} \ll T,$$

где c — скорость звука в газе, T — период ультразвуковых колебаний. Или

$$h_0 \ll cT. \tag{3}$$

Это — ограничение на допустимый средний зазор.

Также нужно не забыть про выполнение сильного неравенства

$$A \ll h_0, \tag{4}$$

которое требуется для справедливости разложения в ряд функции $P(t)$ (см. раздел 2).

Напишем совмещенное условие:

$$\boxed{A \ll h_0 \ll cT.}$$

При нормальном воздухе с $c \sim 300$ м/с максимум правой части совмещенного условия достигается при минимуме частоты $\sim 10^4$ Гц (ниже уже область звука) и составляет $cT|_{\max} \sim 10^{-2}$ м. Отвечающие этому значения h_0, A согласуются с опытами по так называемой near-field acoustic levitation [8].

Далее, посмотрим на расчетное выражение

$$h_0 = A\sqrt{\frac{21P_0S}{25Mg}}$$

и увидим, что условие (4) еще требует

$$\sqrt{\frac{21P_0S}{25Mg}} \gg 1,$$

так что соотношение величин P_0, S, M, g не может быть произвольным.

Литература

[1] И. И. Воробьев, П. И. Зубков, Г. А. Кутузова, О. Я. Савченко, А. М. Трубачев и В. Г. Харитонов. *Задачи по физике*. Новосибирск: Новосибирский государственный университет, 2008.

[2] Г. О. Патрушев и В. И. Якушевич. «Вибрация против трения». В: *Потенциал* 4 (2019).

[3] Павел Виктор. *Решение задачи Савченко 3.3.36*. www.youtube.com.

[4] И. И. Блехман. *Вибрационная механика*. Физматлит, 1994.

[5] А. М. Мицкевич. «Движение тела по тангенциально колеблющейся поверхности с учетом трения». В: *Акустический журнал* 13.3 (1967), с. 411—416.

[6] Ю. М. Волченко. *Научная графика на языке Asymptote*. 2018.

[7] Charles Staats III. *Пособие по Asymptote*. 2022.

[8] Sadayuki Ueha, Yoshiki Hashimoto и Yoshikazu Koike. «Non-contact transportation using near-field acoustic levitation». В: *Ultrasonics* 38.1-8 (2000), с. 26—32.