Векторы в баллистике

И. И. Кравченко
Олимпиадная физика   Physway

Решение задачи на движение с постоянным ускорением (в общем случае криволинейное) можно значительно упростить, если рассуждать в терминах векторов.

Так, в некоторых задачах можно «нарисовать» формулы

$$\vec{s} = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}, \quad \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t.$$

Эти формулы называют *треугольник перемещений* и *треугольник скоростей* соответственно.

Если поделить формулу треугольника перемещений на время, то получится еще одна полезная формула:

$$\frac{\vec{s}}{t} = \vec{v}_0 + \frac{\vec{a}t}{2}.$$

(В обиходе можно называть ее *«полутреугольник скоростей»*.)

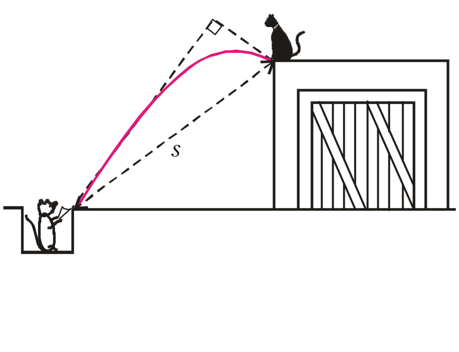
В рамках такого подхода много задач решаются как геометрические. Подробнее об этом в следующих пособиях:

- Геометрические идеи при решении баллистических задач. А. А. Коновалов. Потенциал, 2013, № 1.
- И. Яковлев. Баллистика. Векторы. mathus.ru.

Впрочем, в задаче, приводящей к сложным геометрическим конструкциям, имеет смысл проводить расчет прямо по векторным уравнениям. В связи с этим рекомендуется следующий материал:

- И. Яковлев. Векторы и механика. mathus.ru.

Задача 1. (*Всеросс., 1999, финал, 9*) Кот Леопольд сидел у края крыши. Два злобных мышонка выстрелили в него из рогатки. Однако камень, описав дугу, упал у ног кота (см. рисунок) через время $\tau = 1$ с. На каком расстоянии s от мышей находился кот Леопольд, если известно, что векторы скоростей камня в момент выстрела и в момент падения были взаимно перпендикулярны?



$\boxed{s = g\tau^2/2}$

Задача 2. Тело запустили с начальной скоростью v_0 под углом к горизонту и оно движется с ускорением g. Покажите, что площадь треугольника скоростей с одной стороны равна

$$\frac{1}{2}Lg,$$

где L — дальность полета; а с другой стороны эта площадь равна

$$\frac{1}{2}vv_0\sin\beta,$$

где v — конечная скорость, β — угол между конечной скоростью и начальной.

В предыдущей задаче вы встретили один из примеров того, как «работает» геометрия в векторных конструкциях в баллистике. Впоследствии вы сможете найти множество других геометрических идей и фактов.

Задача 3. (*Яковлев, «Баллистика. Векторы»*) Тело, брошенное с поверхности земли со скоростью v_0 под некоторым углом к горизонту, упало на землю спустя время t.

а) Найдите дальность полёта l.

б) Какова максимальная дальность полёта камня, брошенного с данной скоростью?

$\boxed{\text{а) } l = t\sqrt{v_0^2 - g^2t^2/4}\text{; б) } l_{\max} = v_0^2/g}$