

# Дифференциальные уравнения в физике

И. И. Кравченко

Олимпиадная физика      Physway

Часто описать сложный процесс с помощью обычных, «школьных» формул не получается корректно. (Можно также говорить про сложное явление, или объект, или систему.)

В таком случае можно разделить данный процесс на *бесконечно малые части (элементы)*, выбрать произвольную такую часть и описать ее так, как это позволяет «школьная» физика. Уравнение, описывающее элемент процесса, обычно содержит *бесконечно малые величины (дифференциалы)*; отсюда название такого уравнения — *дифференциальное уравнение*.

Итак, соответствующее дифференциальное уравнение записано — что дальше? Чтобы получить описание всего процесса, нужно *решить* дифференциальное уравнение. Это — чисто математическая задача. По окончании решения в лучшем случае мы получим уравнение, которое дает связь величин, характеризующих исходный процесс.

В простейшем случае решить дифференциальное уравнение получается через *разделение переменных* с последующим *интегрированием* (вычислением *интегралов*). Кроме того, нужно помнить, что решения многих видов дифференциальных уравнений известны *заранее* из курса математики.

Необходимые сведения по дифференциальным уравнениям, интегралам и о приложении этого в физике в пособиях:

- И. Яковлев. [Дифференциальные уравнения](http://mathus.ru). mathus.ru.
- Д. Юмашев. [Интегралы и производные в физике](#). ФАЛТ МФТИ. 2006.
- Я. Зельдович. [Высшая математика для начинающих физиков и техников](#). 1982.

ЗАДАЧА 1. Точка движется произвольным образом. Покажите, что

- элемент пути  $ds$  точки равен

$$ds = v dt,$$

где  $v$  — скорость точки на бесконечно малом промежутке времени  $dt$ ;

- бесконечно малое изменение скорости  $dv$  равно

$$dv = a dt,$$

где  $a$  — ускорение точки на бесконечно малом промежутке времени  $dt$ ;

ЗАДАЧА 2. Точка движется со скоростью, зависящей от времени по закону  $v(t) = t^2$ . Найти зависимость пути от времени  $s(t)$ .

**Ход решения:**

1. Убедитесь, что формула  $s = vt$  для конечных величин не корректна.
2. Выделите малый элемент пути  $ds$  и запишите

$$ds = v dt.$$

3. Сделайте в предыдущем уравнении подстановку  $v = t^2$  и получите дифференциальное уравнение с двумя переменными:

$$ds = t^2 dt.$$

4. Переменные  $s$  и  $t$  уже разделены в уравнении — можно интегрировать:

$$\int ds = \int t^2 dt.$$

5. Вычислите интегралы и получите

$$s = \frac{t^3}{3} + C,$$

где  $C$  — константа интегрирования, которая находится из начальных условий. При  $t = 0$  считаем  $s = 0$ , тогда  $C = 0$ .

$$s = t^3/3$$

ЗАДАЧА 3. Найдите зависимость координаты тела от времени, если тело движется вдоль оси  $x$  с ускорением  $a = a_0 + bt$ . В начальный момент  $t = 0$  скорость и координата тела равны соответственно  $v_0$  и  $x_0$ .

$$x = x_0 + v_0 t + a_0 t^2/2 + bt^3/6$$

ЗАДАЧА 4. («Росатом», 2014, 11) Тело движется вдоль оси  $x$  из точки с нулевой координатой так, что проекция его скорости на ось  $x$  зависит от координаты  $x$  по закону  $v_x = \alpha\sqrt{x}$ , где  $\alpha$  — известная постоянная. Через какое время после начала движения тело будет иметь координату  $x_0$ ?

$$\tau = 2\sqrt{x_0}/\alpha$$

ЗАДАЧА 5. («Росатом», 2011, 11) Имеется цилиндрический сосуд глубиной  $H = 5$  м, полностью заполненный водой. В дне сосуда сделано отверстие, площадь которого в 40 раз меньше площади сечения сосуда. За какое время вся вода вытечет из сосуда? Ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

*Указание.* Скорость истечения воды из малого отверстия, расположенного на глубине  $h$ , равна  $\sqrt{2gh}$  (закон Торричелли).

$$\tau = 40\sqrt{2H/g} = 40 \text{ с}$$